

Mecanica Quantistica

12.7.2009

Traccia di soluzione

1) Ricordiamo che

$$\frac{\bar{x}}{\|x\|} \cdot \bar{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (1)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} D &= x^i p^i + p^i x^i \\ &= 2x^i p^i = 3i\hbar \end{aligned} \quad (2)$$

Usando la eq. (1) troviamo

$$D = -i\hbar \left(2n \frac{\partial}{\partial x} + 3 \right) \quad (3)$$

2) La dip. dal tempo degli elementi di matrice di qualunque operatore si data da

$$\frac{d}{dt} \langle D \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [D, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial D}{\partial t} \right\rangle \quad (4)$$

Nel nostro caso $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$ e

$$[D, H] = [D, T] + [D, V] \quad (5)$$

con

$$T = \frac{p^2}{2m}, \quad V = -\frac{e^2}{r} \quad (6)$$

1

Calcoliamo: due contributi separatamente

$$\begin{aligned} [D, \frac{p^2}{2m}] &= \frac{1}{2m} ([x^i p^i, p^j p^j] + [p^i x^i, p^j p^j]) \\ &= \frac{1}{2m} ([x^i, p^j p^j] p^i + p^i [x^i, p^j p^j]) = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} (2 \delta^{ij} p_j p^i + 2 p^i \delta_{ij} p^j) = 4T i\hbar \quad (7) \end{aligned}$$

$$[D, -\frac{e^2}{r}] = -2i\hbar \left[r \frac{\partial}{\partial r}, -\frac{e^2}{r} \right] = 2i\hbar e^2 \left(-\frac{1}{r} \right) = 2i\hbar V \quad (8)$$

Pertanto

$$\frac{d}{dt} \langle D \rangle = 2i\hbar \langle 2T + V \rangle \quad (9)$$

con T e V dati dalla eq. (6)

3) Ricordiamo che per un potenziale centrale

$$|E \ell m\rangle = \varphi_{E\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (10)$$

Nel nostro caso $\varphi_{E\ell}(r) \equiv \frac{u_{n\ell}(r)}{r}$ sono le autofunzioni radiali dell'atomo di idrogeno.

Notiamo inoltre che poiché $|E \ell m\rangle$ è uno stato stazionario (autostato di energia) l'elemento di matrice non dipende dal tempo e possiamo quindi calcolarlo a $t=0$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle E \ell m | D | E \ell m \rangle &= \int_0^{\infty} dr r^2 \varphi_{E\ell}(r) (-i\hbar) \left(2r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) \varphi_{E\ell}(r) \\ &\quad \times \int d\Omega |Y_{\ell m}(\theta, \varphi)|^2 \quad (11) \end{aligned}$$

L'integrale angolare vale uno per normalizzazione, ed

abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\langle E_{lm} | D | E_{lm} \rangle &= \int_0^{\infty} dr (-i\hbar) \left(2r^3 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 3r^2 \varphi^2 \right) \\ &= -i\hbar \int_0^{\infty} dr \frac{\partial}{\partial r} [r^3 \varphi^2] = 0\end{aligned}\quad (12)$$

L'integrale fa zero perché quando $r \rightarrow \infty$, $\varphi(r) \rightarrow 0$ esponenzialmente, e quando $r \rightarrow 0$, $\varphi_{E_{lm}}(r) \sim \frac{r^{l+1}}{r}$ (infatti come r^{l+1}).

Notare che la eq. (12) coincide con il risultato dato nel

testo (senza fattore $i\hbar$) perché $0 \times i\hbar = 0$ (!)

Concludiamo quindi che $\langle D \rangle = 0$ a tutti i tempi e quindi

$$\frac{d}{dt} \langle E_{lm} | D | E_{lm} \rangle = 0 \quad (13)$$

4) Confrontando la eq. (9) e la eq. (13) abbiamo che

$$\langle E_{lm} | 2T + V | E_{lm} \rangle = 0 \quad (14)$$

ossia

$$\langle E_{lm} | T | E_{lm} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{lm} | V | E_{lm} \rangle \quad (15)$$

D'altra parte,

$$\langle E_{lm} | T + V | E_{lm} \rangle = \langle E_{lm} | H_0 | E_{lm} \rangle = E_n \quad (16)$$

dove

$$E_n = -\frac{m e^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad l \leq n-1 \quad (17)$$

è l'energia dell' n -esimo autostato dell'atomo di idrogeno.

Pertanto, usando la (15) nella (16), abbiamo

$$E_m = \langle E_{lm} | T + V | E_{lm} \rangle = \frac{1}{2} \langle E_{lm} | V | E_{lm} \rangle \quad (18)$$

da cui

$$\langle E_{lm} | V | E_{lm} \rangle = 2E_m \quad (19)$$

$$\langle E_{lm} | T | E_{lm} \rangle = -E_m$$

$$5) \quad \frac{d}{dt} \langle \bar{L} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\bar{L}, H] \rangle = 0 \quad (20)$$

Gli elementi di matrice del momento angolare non dipendono dal tempo perché l'hamiltoniana è invariante per rotazioni, quindi il momento angolare commuta con essa e pertanto i suoi elementi di matrice si conservano

$$6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{L} \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [\bar{L}, B L_z] \rangle \\ &= \frac{iB}{\hbar} \langle [L_z, L^i] \rangle \\ &= -B \varepsilon^{z i j} \langle L^j \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

La eq. (21) vale per uno stato qualunque. Ma in un autostato di L_z , come gli stati $|E_{lm}\rangle$, abbiamo

$$\langle E_{lm} | L_z | E_{lm} \rangle = \hbar m$$

$$\langle E_{lm} | L_x | E_{lm} \rangle = \langle E_{lm} | L_y | E_{lm} \rangle = 0 \quad (22)$$

In fatti,

$$L_{\pm} = L_x \pm i L_y \quad (23)$$

$$\langle l, m' | L_{\pm} | l, m \rangle = c_{lm}^{\pm} \delta_{m \pm 1, m'} \quad (24)$$

Ma la (24) implica che gli elementi di matrice diagonali di L_x, L_y si annullano, da cui la (22).

pertanto

$$\frac{d}{dt} \langle E_{lm} | \bar{L} | E_{lm} \rangle = 0 \quad (25)$$

7) La perturbazione al primo ordine è data da

$$\Delta E_m = \langle E_{lm} | B L_z | E_{lm} \rangle = \hbar B m \quad (26)$$

Notiamo che in realtà il risultato perturbativo è esatto, perché

$$[L_z, H_0] = 0 \quad (27)$$

La perturbazione rimuove la degenerazione rispetto a m , ma resta la deg. rispetto a $0 \leq l \leq m-1$.

Pertanto il livello energetico

$$E_{nm} = E_n + \hbar B m \quad (28)$$

con E_n dato dalla (17) e n volte degenera.