# Meccanica Quantistica I

## 22 luglio 2009

## Traccia di soluzione

Poiché le due particelle hanno la stessa massa, gli operatori posizione ed impulso del baricentro e relativi sono

$$\begin{cases} \bar{x}_B = \dfrac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} & (1) \\ \bar{x}_R = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{p}_B = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 & (3) \\ p_R = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) & (4) \end{cases}$$

rel. di commutazione

$$[p_B^i, x_B^j] = -i\hbar\delta_{ij} \qquad (5)$$

$$[p_R^i, x_R^j] = -i\hbar\delta_{ij} \qquad (6)$$

$$[\bar{p}_R, \bar{p}_B] = [\bar{x}_R, \bar{x}_B] = [\bar{p}_R, \bar{x}_B] = [\bar{x}_R, \bar{p}_B] = 0 \qquad (7)$$

ha quindi

$$H = H_B + H_R \qquad (8)$$

$$\begin{cases} H_B = \dfrac{\bar{p}_B^2}{4m} + x_B^{(3)}(2-1)Ee & (9) \\ H_r = \dfrac{\bar{p}_R^2}{m} - \dfrac{2e^2}{|x|} + \dfrac{e}{2}(2+1)Ex^{(3)} & (10) \end{cases}$$

$$e \quad [H_B, H_r] = 0 \qquad (11)$$

2) Le eq. di Heisenberg per gli operatori $\bar{p}_B, \bar{x}_B$ sono

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} p_B^i = \dfrac{i}{\hbar}[H, p_B^i] = -\delta^{i3}(2-1)eE & (12) \\ \dfrac{d}{dt} x_B^i = \dfrac{i}{\hbar}[H, x_B^i] = \dfrac{p_B^i}{2m} & (13) \end{cases}$$

con soluzione

$$p_B^i(t) = p_B^i(0) - eE(2-1)t\,\delta^{i3} \qquad (14)$$

$$x_B^i(t) = x_B^i(0) + \frac{p_B^i(0)}{2m}t - \frac{E}{4m}e(2-1)t^2\delta^{i3} \qquad (15)$$

Il baricentro si muove con moto uniformemente accele[rato]

lungo l'asse z.

3) Le eq. di Heisenberg per gli operatori $\bar{x}_R, \bar{p}_R$ sono

$$\frac{d}{dt} x_R^i = \frac{2p_R^i}{m} \qquad (16)$$

$$\frac{d}{dt} p_R^i = -Ze^2 \frac{x_R^i}{|\bar{x}_R|^3} - \frac{e}{2}(Z+1) E \delta^{i3} \qquad (17)\ (17)$$

4) Il valor medio dell'impulso soddisfa la eq. del ~~moto~~

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \bar{p}_R | \psi \rangle = -Ze^2 \langle \psi | \frac{\bar{x}_R}{|\bar{x}_R|^3} | \psi \rangle \qquad (18)$$

La funzione d'onda per lo stato fondamentale del sistema è quella dello stato fondamentale idrogenoide:

$$\psi_{000}(\bar{x}_R) = N e^{-Z\|\bar{x}_R\|/a_0} \qquad (19)$$

con N ed $a_0$ costanti opportune. Ne segue che

$$\psi_{000}(\bar{x}_R) = \psi_{000}(-\bar{x}_R) \qquad (20)$$

Pertanto

$$\langle \psi_{000} | \frac{\bar{x}_R}{|\bar{x}_R|^3} | \psi_{000} \rangle = \int dx_R dy_R dz_R \frac{\bar{x}_R}{\|\bar{x}_R\|} |\psi_{000}(\bar{x}_R)|^2$$

$$= 0 \qquad (21)$$

perché è l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico.

Ricordando che le autofunzioni idrogenoidi $|n\,l\,m\rangle$ hanno tutte parità definita

$$\psi_{nlm}(\bar{x}) = (-1)^l \psi_{nlm}(-\bar{x}) \qquad (22)$$

si vede inoltre che ciò resta vero in un qualunque autostato dell'hamiltoniana, per lo stesso motivo:

$$\langle \psi_{n\ell m} | \frac{\bar{x}_R}{\|\bar{x}_R\|^3} | \psi_{n\ell m} \rangle = 0 \qquad (23)$$

) Lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno è non-degenere la correzione al primo ordine alla sua energia dovuta alla perturbazione è data da

$$\Delta E_{000} = \langle 000 | \frac{e}{2}(Z+1) E x_R^{(3)} | 000 \rangle \qquad (24)$$

$$= 0$$

per lo stesso motivo per cui si annulla il valor medio eq. (21)

) Il primo stato eccitato dell'atomo di idrogeno è quattro volte degenere: i numeri quantici dei 4 stati sono

$$n = 1 \qquad \ell = 0 \qquad m = 0 \qquad (25)$$

$$n = 1 \qquad \ell = 1 \qquad m = -1, 0, 1$$

Occorre pertanto diagonalizzare la matrice 4 × 4

$$V_{\ell\ell' m m'} = \langle n=1\ \ell m | \frac{e}{2}(Z+1) E x_R^{(3)} | n=1\ \ell' m' \rangle \qquad (26)$$

La eq. (22) implica che $V_{\ell\ell' m m'} \neq 0$ solo se $\ell + \ell'$ è dispari.

Inoltre, $V_{ll'mm'} = 0$ solo se $m = m'$ come si vede facendo una rotazione attorno all'asse z:

$$R_z^{\theta} |l m\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\theta} |l m\rangle \qquad (27)$$

e $$R_z^{\theta -1} x^{(3)} R^{\theta} = x^{(3)} \qquad (28)$$

(un vettore è invariato sotto rotazioni attorno al suo asse), da cui

$$\langle l m | x^{(3)} | l' m'\rangle =$$

$$= \langle l m | R_z^{\theta} R_z^{-1\theta} x^{(3)} R_z^{\theta} R_z^{-1\theta} | l' m'\rangle =$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}\theta (m - m')} \langle l m | x^{(3)} | l' m'\rangle \qquad (29)$$

che implica

$$\langle l m | x^{(3)} | l' m'\rangle = 0 \quad \text{se} \quad m \neq m' \qquad (30)$$

Ne segue che

- la perturbazione V al primo ordine non ha effetto sugli stati

$|n=1\ l=1\ m=\pm 1\rangle$ che restano degeneri con energia imperturbata $E_1$

- sugli stati

$$|1\rangle \equiv |n=1\ \ell=1\ m=0\rangle$$

$$|2\rangle \equiv |n=1\ \ell=0\ m=0\rangle$$

la perturbazione ha la forma

$$V = \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

con

$$V_{12} = \int dr_R\, d\theta_R\, d\varphi_R\, r_R^2 \sin\theta_R\, \Psi^*_{110}(r_R \theta_R \varphi_R)\, \frac{e}{2}(Z+1) E x_R^{(3)}\, \Psi_{100}(r_R \theta_R \varphi_R) \qquad (32)$$

Ricordando che $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ è reale se $m=0$ vediamo che $V_{12}$ è reale. Pertanto gli stati che diagonalizzano la perturbazione sono

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle \pm |2\rangle\right) \qquad (33)$$

con autovalori

$$V|\pm\rangle = \pm V_{12}|\pm\rangle \qquad (34)$$

Pertanto al primo ordine gli autostati dell'energia diventano

$$|\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n=1\ \ell=1\ m=0\rangle \pm |n=1\ \ell=0\ m=0\rangle\right) \qquad (35)$$

con energia $E_0 \pm V_{12}$ (3

7) In assenza della perturbazione, l'hamiltoniana è diagonalizzabile simultaneamente a $L^2$ ed $L_z$, poiche si tratta di un problema centrale

$$[L^2, H] = 0$$ (37

$$[L_z, H] = 0$$

(in alternativa, è possibile diagonalizzare il vettore di Lenz ed una delle sue componenti).

In presenza della perturbazione, è sempre possibil diagonalizzare $L_z$, ma non più $L^2$, perché, indic con $H_E$ il termine prop. a $E$ nell'hamiltoniana, si h

$$[L^2, H_E] \neq 0$$ (38)

$$[L_z, H_E] = 0$$

dove abbiamo fatto uso della eq. (28).

Notare che il risultato della domanda precedente è consistente con questa conclusione.

L'aggiunta di un termine proporzionale a $L_z$ all'hamil ma non modifica le relazioni di commutazione (37 -
Esso però rimuove la degenerazione rispetto a $m$ dell spettro imperturbato, che segue dal fatto che l'ha

niana imperturbata non può dipendere da $L_z$ in quanto $[H, L_x] = [H, L_y] = 0$ in assenza di perturbazione. Nel caso perturbato, la degenerazion è già rimossa dal termine $H_E$, in quanto

$$[L_x, H_E] \neq 0 \qquad (39)$$

$$[L_y, H_E] \neq 0 \qquad (40)$$

mentre la degenerazione a livello imperturbato era propio dovuta alla pres di questi operatori, non diagonalizzabili simultaneamente, che commutano con l'hamiltoniana imperturbata.