Meccanica Quantistica
19-7-2011
Traccia di soluzione

1) L'hamiltoniana è completamente separabile. Pertanto le autofunzioni hanno la forma

$$\psi = \psi_{n_1}(x_1)\,\psi_{n_2}(x_2)\,\psi_{n_3}(x_3)\;\chi(s_1^z, s_2^z, s_3^z) \quad (1)$$

Gli autovalori sono quelli della buca di potenziale infinita:

$$E_{n_1 n_2 n_3 s} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) + E_s \quad (2)$$

dove

$$H_s\,\chi = E_s\,\chi \quad (3)$$

I primi stati e degenerazioni sono

stato fond. $\quad E_{111s} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\,3 + E_s^{(0)}$ non deg. (4)

1° stato eccitato $\quad E_{211s} = E_{121s} = E_{112s} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\,6 + E_s^{(0)}$ (5)

tre volte deg.

2° stato eccitato $\quad E_{221s} = E_{212s} = E_{122s} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\,9 + E_s^{(0)}$ (6)

tre volte deg.

Notare che $\quad E_{113} = \frac{\hbar^2\pi^2\,11}{8ma^2} + E_s^{(0)} > E_{221s}$ (7)

2) Se la funzione d'onda X_S è simmetrica, la f. d'onda spaziale deve essere completamente antisimmetrica. Ne segue

che se $n_1 = n_2$ oppure $n_1 = n_3$ oppure $n_2 = n_3$ la f. d'onda si annulla. Pertanto la f. d'onda dello stato fondamentale è

$$
\begin{aligned}
\psi_0(x_1, x_2, x_3) = \Big[& \psi_1(x_1)\, \psi_2(x_2)\, \psi_3(x_3) \, + \\
+ & \psi_1(x_2)\, \psi_2(x_3)\, \psi_3(x_1) \\
+ & \psi_1(x_3)\, \psi_2(x_1)\, \psi_3(x_2) \\
- & \psi_1(x_2)\, \psi_2(x_1)\, \psi_3(x_3) \\
- & \psi_1(x_3)\, \psi_2(x_2)\, \psi_3(x_1) \\
- & \psi_1(x_1)\, \psi_2(x_3)\, \psi_3(x_2) \Big] \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

e la sua energia è

$$E_{123} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8 m a^2} \, 14 + E_S^{(0)} \qquad (9)$$

Lo stato è non-degenere in quanto la degenerazione di scambio che si avrebbe nel caso di particelle non identiche tra gli stati $|1\,2\,3\rangle$, $|1\,3\,2\rangle$, ... ($3! = 6$ in totale) è rimossa dalla richiesta che la f. d'onda sia antisimmetrica.

3) La correzione all'energia dello stato fondamentale è data da

$$\Delta E^{(0)} = \langle \psi_0 | V^{\varepsilon} | \psi_0 \rangle \qquad (10)$$

dove $\langle x_1 x_2 x_3 | \psi_0 \rangle = \psi_0 (x_1, x_2, x_3)$ è data dalla Eq. (8) e

$$V^{\varepsilon} = \varepsilon \left(\delta(x_1) + \delta(x_2) + \delta(x_3) \right) \qquad (11)$$

Ora notiamo che

$$\langle \psi_i (x) | \psi_j (x) \rangle = \delta_{ij} \qquad (12)$$

pertanto

$$\Delta E^{(0)} = \varepsilon \Big(\langle \psi_1 | V^{\varepsilon}_{(1)} | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | V^{\varepsilon}_{(1)} | \psi_2 \rangle + \langle \psi_3 | V^{\varepsilon}_{(1)} | \psi_3 \rangle \Big) \qquad (13)$$

dove

$$V^{(\varepsilon)}_{(1)} \equiv \varepsilon\, \delta(x)$$

e con $|\psi_i\rangle$ si intendono gli autostati di particella singola. Ora ricordiamo che le autofunzioni della buca unidimensionale infinita sono

$$\langle x | \psi_n \rangle = \psi_n (x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cos \dfrac{n\pi}{2a} x & n \text{ dispari} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin \dfrac{n\pi}{2a} x & n \text{ pari} \end{cases} \qquad (14)$$

Ora notiamo che $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, quindi

$$\langle n | V^{\varepsilon}_{(1)} | n \rangle = \varepsilon \int dx \, |\psi_n(x)|^2 \delta(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\varepsilon & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \qquad (15)$$

Pertanto

$$\Delta E^{(0)} = \frac{2\varepsilon}{a} \qquad (16)$$

4) Notiamo che

$$H_S^{(0)} = \frac{\alpha}{2} \left[S^{tot\,2} - \left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \right) \right] \qquad (17)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \left[S^{tot\,2} - \hbar^2 \frac{9}{4} \right] \qquad (18)$$

dove $\bar{S}^{tot} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$

Gli autostati ed autovalori dello spin totale si ottengono combinando prima due spin, ad es 1, 2

$$S^{12}_{tot} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

Autoval. di $\bar{S}^{12}_{tot} = \begin{cases} 1 & \text{~~tripletto~~} \quad S^z = -1, 0, 1 \\ 0 & S^z = 0 \end{cases} \qquad (19)$

Combinando quindi S^{12} con S^3 si ha

$$S^{12}=1 \Rightarrow S^{tot}=\begin{cases} 3/2 & S_z^{tot}=-3/2,-1/2,1/2,3/2 \\ 1/2 & S_z^{tot}=-1/2,1/2 \end{cases} \qquad (20)$$

$$S^{12}=0 \Rightarrow S^{tot}=1/2 \qquad S_z^{tot}=-1/2,1/2 \qquad (21)$$

Pertanto si hanno 4 stati con $S^{tot}=3/2$ e autovalore

$$E^{(S)}_{3/2}=\frac{\alpha}{2}\frac{3}{2}\hbar^2=\frac{3}{4}\alpha\hbar^2 \qquad (22)$$

(4 volte degenere)

e 4 stati con $S^{tot}=1/2$ e autovalore

$$E^{(S)}_{1/2}=\frac{\alpha}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\hbar^2=-\frac{3}{4}\alpha\hbar^2 \qquad (23)$$

(4 volte degenere).

5) Quando $\left(\alpha \ll \frac{1}{ma^2}\right.$ l'energia di spin è trascurabile rispetto a quella spaziale. In tal caso lo stato fondamentale è quello di minima energia spaziale. Esso non può essere dato dallo stato Eq. (4) in quanto questo ha f. d'onda completamente simmetrica mentre non è possibile costruire una f. d'onda completamente antisimmetrica per la parte di spin in quanto con $s=1/2$ solo due stati di S_z sono disponibili.

È tuttavia possibile costruire una f. d'onda in cui due particelle sono in uno stato di spin totale nullo, e quindi antisimmetrica rispetto a due delle tre particelle.

Pertanto in tal caso

$$E^{(0)} = E_{112} + E^{S}_{1/2} \qquad (24)$$

con E_{112} dato dalla Eq. (5) ed $E^{S}_{1/2}$ dato dalla Eq. (23).

Quando $|\alpha| \gg \frac{1}{ma^2}$ l'energia di spin domina.

In tal caso lo stato fondamentale è uno stato di spin 3/2, visto che α è negativa, quindi $E^{(S)}_{3/2} < E^{(S)}_{1/2}$.

Le funzioni d'onda di spin per questi stati sono completamente simmetriche. In tal caso la f. d'onda spaziale è completamente antisimmetrica. Pertanto in tale caso

$$E^{(0)} = E_{123} + E^{S}_{3/2} \qquad (25)$$

con E_{123} dato dalla Eq. (9) ed $E^{S}_{3/2}$ dato dalla Eq. (22).

6) La f. d'onda di spin al tempo t è data da

$$|\chi(t)\rangle = e^{\frac{t}{i\hbar}B(S_1^x + S_2^x + S_3^x)} \, |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle \qquad (26)$$

Si ha quindi

$$\langle \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} | \chi(t)\rangle = \left(\langle \tfrac{1}{2} | e^{\frac{t}{i\hbar}BS_1^x} | \tfrac{1}{2} \rangle \right)^3 =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(\langle \tfrac{1}{2}^x | + \langle -\tfrac{1}{2}^x | \right) \left(e^{-\frac{1}{2}\frac{it}{\hbar}B} | \tfrac{1}{2}^x \rangle + e^{+\frac{1}{2}\frac{it}{\hbar}B} | -\tfrac{1}{2}^x \rangle \right) \right]^3$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(e^{i\frac{Bt}{\hbar 2}} + e^{-i\frac{Bt}{2\hbar}} \right) \right]^3 =$$

$$= \cos^3 \frac{Bt}{\hbar 2}$$

La probabilità è pertanto

$$P = \cos^6 \frac{Bt}{2\hbar}$$