ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

16 luglio 2019

Traccia di soluzione

(1) Il problema è separabile in tre hamiltoniane unidimensionali per ognuna particella. Siano S e S_z rispettivamente lo spin totale e la sua componente lungo z. Gli autovalori dell'energia si possono quindi scrivere come somma degli autovalori per ciascuna particella

$$E = E_{n_1,n_2,n_3} + E_{m_1,m_2,m_3}$$

e le autofunzioni come prodotto

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}(\vec{x}_1)\psi_{m_1,m_2,m_3}(\vec{x}_2)\chi_{s_z^1}\chi_{s,s_z^2}$$

dove

$$E_{i,j,k} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}\left(\frac{i^2}{a_1^2} + \frac{j^2}{a_2^2} + \frac{k^2}{a_3^2}\right) = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}\left(4(i^2+j^2)+k^2\right),$$

$$\psi_{n,l,m}(\vec{x}) = \psi_{n,a}(x)\,\psi_{m,b}(y)\,\psi_{l,c}(z),$$

$$\psi_{n,a}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\frac{n\pi}{2a}x, & \text{se } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{n\pi}{2a}x, & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

e χ_{s_z} sono spinori corrispondenti alle due particelle.

(2) In questo caso compare nell'hamiltoniana il termine

$$\frac{\mu}{\hbar}\vec{B}\cdot(\vec{s}_1+\vec{s}_2) = \frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|S_z\,.$$

L'hamiltoniana continua ad essere separabile e gli autovalori dell'energia rimangono quelli del punto precedente con l'aggiunta di un contributo di spin

$$E_s = \mu|\vec{B}|s_z^1 + \mu|\vec{B}|s_z^2\,,$$

dove $\hbar s_z^i$ è l'autovalore di S_z per la i-esima particella.

(3) Lo stato fondamentale è non degenere con energia $2E_{1,1,1}$ e con funzione d'onda

$$\psi = \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_2)\chi_{0,0},$$

dove ora χ_{s,s_z} è lo lo spinore per il sistema di due particelle, dipendente dallo spin totale s e dalla sua terza componente s_z, e quindi $\chi_{0,0}$ corrisponde allo stato di singoletto (antisimmetrico). La parte spaziale è simmetrica, dimodoché la funzione d'onda totale è antisimmetrica.

Il primo stato eccitato ha energia $E_{1,1,1} + E_{1,1,2}$, e può essere scelto con funzione d'onda spaziale simmetrica e di spin antisimmetrica $\psi_1^+(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\chi_{0,0}$, oppure spaziale antisimmetrica e di spin simmetrica $\psi_1^-(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\chi_{1,s_z}$,

$$\psi_1^{\pm}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,2}(\vec{x_2}) \pm \psi_{1,1,2}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x_2}).\right),$$

Lo stato ̀e quindi quattro volte degenere, visto che la funzione d'onda di spin simmetrica ammette tre possibili valori di s_z (tripletto).

(4) Lo stato fondamentale ha gli stessi autovalori e autofunzioni del caso precedente per via della relazione $\mu|\vec{B}| \ll E_0$. Il primo stato eccitato è ora non degenere, in quanto lo stato avente $s_z = -1$ ha ora energia minore degli altri stati di spin. L'energia è $E_{1,1,1} + E_{1,1,2} - \mu|\vec{B}|$ e la funzione d'onda $\psi_1^-(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\chi_{1,-1}$, con la possibilità di scegliere lungo quale delle tre direzioni è l'eccitazione.

(5) Come si è visto alla domanda precedente, lo stato fondamentale e lo stato eccitato sono autostati dello spin totale. La misura di spin darà quindi come risultato il corrispondente autovalore con probabilità 1, e cioé $S_z = 0$ per lo stato fondamentale e $S_z = -\hbar$ per il primo stato eccitato.

(6) Si veda ad esempio il libro di testo (Sez.14.1).

(7) Le equazioni del moto di Heisenberg sono:

$$\frac{d}{dt}S_z = -\frac{i}{\hbar}[S_z, H] = 0\,, \quad \frac{d}{dt}S_x = -\frac{i}{\hbar}[S_x, H] = -\frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|S_y\,, \quad \frac{d}{dt}S_y = -\frac{i}{\hbar}[S_y, H] = \frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|S_x\,,$$

$$\frac{d}{dt}x_i^{(j)} = -\frac{i}{\hbar}[x_i^{(j)}, H] = -\frac{i}{2m\hbar}[x_i^{(j)}, \vec{p}_i^{\,2}] = \frac{1}{m}p_i^{(j)}$$

$$\frac{d}{dt}p_i^{(j)} = -\frac{i}{\hbar}[p_i^{(j)}, H] = -\frac{i}{\hbar}[p_i^{(j)}, V(\vec{x}_i)] = -V_0\left[\delta(x^{(j)} - a_j) + \delta(x^{(j)} + a_j)\right]$$

dove è stato tenuto conto della discontinuità del potenziale ad $x^{(i)} = \pm a_i$.

(8) La funzione d'onda a $t = 0$ è data da

$$\psi(0) = \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_2)\chi_{1,1},$$

mentre la funzione d'onda dello stato fondamentale della domanda (2) è data da

$$\psi^f = \psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_2)\chi_{1,-1}.$$

L'evoluzione dell'hamiltoniana spaziale produce un fattore di fase che non influsce sulla probabilità. L'evoluzione temporale della hamiltoniana di spin produce invece la nota precessione dello spin

$$\langle i|e^{-\frac{i}{\hbar}|\mu\vec{B}|S_x t}|1,-1\rangle_{s,s_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t & \sin\frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t \\ 0 & -\sin\frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t & \cos\frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

dove abbiamo usato la base canonica $|i\rangle$. La probabilità richiesta è quindi data da

$$P = |\,{}_{s,s_z}\langle 1,1|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|S_x t}|1,-1\rangle_{s,s_z}|^2 = \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\mu}{\hbar}|\vec{B}|t\right)^2 .$$

(9) Si deve calcolare il seguente elemento di matrice

$$\Delta_E = \langle E_0|\lambda\delta^{(3)}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)|E_0\rangle .$$

Usando la base delle coordinate si ottiene

$$\begin{aligned}
\Delta_E &= \lambda\int d^3\vec{x}_1 d^3\vec{x}_2 \psi^*_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi^*_{1,1,1}(\vec{x}_2)\delta^{(3)}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_2) \\
&= \lambda\int d^3\vec{x}_1 \psi^*_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi^*_{1,1,1}(-\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(-\vec{x}_1) \\
&= \lambda\int d^3\vec{x}_1 \psi^*_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi^*_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)\psi_{1,1,1}(\vec{x}_1) = \lambda\int d^3\vec{x}_1 |\psi_{1,1,1}(\vec{x}_1)|^4 .
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che l'autofunzione $\psi_{1,1,1}(\vec{x})$ ha parità definita .