

Traccia di soluzione

19.9.2007

i) Poiché $[H_r, H_s^{(1)}] = 0$, (1)

in quanto agiscono in spazi diversi, lo spettro di H è dato da

$$H |n\ell m s\rangle = (E_{n\ell m} + E_s) |n\ell m s\rangle \quad (2)$$

dove $|n\ell m s\rangle = |n\ell m\rangle |s\rangle$ (3)

$$H_r |n\ell m\rangle = E_{n\ell m} |n\ell m\rangle \quad (4)$$

$$H_s^{(1)} |s\rangle = E_s |s\rangle \quad (5)$$

Giacché H_r è un'hamiltoniana idrogenoide, il suo spettro è

$$E_{n\ell m} = E_n = -\frac{m e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (6)$$

degenera rispetto a ℓ, m , con

$$0 \leq \ell \leq n-1 \quad (7)$$

$$-\ell \leq m \leq \ell \quad (8)$$

(degenerazione del livello n -esimo n^2).

Inoltre si ha

$$H_s^{(1)} |\pm\rangle = \pm E_s |\pm\rangle \quad (9)$$

$$E_s = -\frac{1}{2} \mu \quad (10)$$

visto che $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (11)

con autostati $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, autovalori ± 1

(1)

Lo spettro di $H_s^{(1)}$ è non-degenere. Pertanto la degenerazione dello spettro di H coincide con quella dello spettro di H_n . Ad ogni autostato di H_n corrispondono due autostati di H , associati ai due diversi autostati di H_s .

I commutatori sono

$$\begin{aligned} [H_n, \sigma_i^{(1)}] &= [H_s^{(1)}, \sigma_i^{(1)}] = \\ &= -\frac{1}{2} \mu [\sigma_z, \sigma_i] = -\frac{1}{2} \mu (2i) \varepsilon_{z i k} \sigma_k \\ &= -i \mu \varepsilon_{z i k} \sigma_k \end{aligned} \quad (12)$$

visto che, σ_i le matrici di Pauli (e $\frac{\hbar}{2} \sigma_i$ l'operatore di spin)

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (13)$$

Pertanto la eq. (12) implica

$$[H_n, \sigma_x^{(1)}] = -i \mu \sigma_y \quad (14)$$

$$[H_n, \sigma_y^{(1)}] = +i \mu \sigma_x \quad (15)$$

2) Prendendo l'el. di matrice della eq. (12) in uno stato $|n l m \pm\rangle$ si ha

$$\begin{aligned} &-i \mu \varepsilon_{z i k} \langle n l m \pm | \sigma_k | n l m \pm \rangle = \\ &= \langle n l m \pm | (H_n \sigma_i^{(1)} - \sigma_i^{(1)} H_n) | n l m \pm \rangle \\ &= (E_{n \pm} - E_{n \pm}) \langle n l m \pm | \sigma_i^{(1)} | n l m \pm \rangle = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Pertanto $\langle n l m \pm | \sigma_i^{(1)} | n l m \pm \rangle = 0$

(17) / 2

$$3) \text{ Poiché } [H_n, H_S^{(2)}] = 0 \quad (18)$$

anche in questo caso

$$E = E_{nem} + E_S \quad (19)$$

dove E_{nem} è lo spettro idrogenoide eq. (6) mentre E_S sono gli autovalori di $H_S^{(2)}$. Per determinare lo spettro di $H_S^{(2)}$ notiamo che

$$H_S^{(2)} = -\frac{4\lambda}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar}{2} \bar{\sigma}^{(1)} \cdot \frac{\hbar}{2} \bar{\sigma}^{(2)} \right) \quad (20)$$

$$= -\frac{4\lambda}{\hbar^2} \bar{S}^{(1)} \cdot \bar{S}^{(2)} \quad (21)$$

dove $\bar{S}^{(1)}, \bar{S}^{(2)}$ sono gli operatori di spin per le due particelle. Inoltre, detto

$$\bar{S}_{tot} = \bar{S}^{(1)} + \bar{S}^{(2)} \quad (22)$$

si ha

$$S_{tot}^2 = S^{(1)2} + S^{(2)2} + 2\bar{S}^{(1)} \cdot \bar{S}^{(2)} \quad (23)$$

e quindi

$$H_S^{(2)} = -\frac{2\lambda}{\hbar^2} \left(S_{tot}^2 - (S^{(1)2} + S^{(2)2}) \right) \quad (24)$$

$$= -\frac{2\lambda}{\hbar^2} \left(S_{tot}^2 - 2\hbar^2 \frac{3}{4} \right) \quad (25)$$

$$= -\frac{2\lambda}{\hbar^2} S_{tot}^2 + 3\lambda \quad (26)$$

visto che per spin $\frac{1}{2}$ $S^2 = \hbar^2 S(S+1) = \frac{3}{4} \hbar^2$.

Inoltre, gli autovalori di S_{tot} sono $\hbar^2 s(s+1)$ con

$$|s^{(1)} - s^{(2)}| \leq s \leq s^{(1)} + s^{(2)} \quad (27)$$

$$0 \leq s \leq 1 \Rightarrow s = \begin{cases} 0 & s_{tot}^z = 0 \\ 1 & s_{tot}^z = 0, \pm 1 \end{cases} \quad (28)$$

Pertanto

$$H_s^{(2)} |s_{tot}\rangle = E_{s_{tot}} |s_{tot}\rangle \quad (29)$$

$$E_{s_{tot}} = \lambda (-2s(s+1) + 3) = \begin{cases} 3\lambda & s=0, \text{ non degenera} \\ -\lambda & s=1, \text{ tre volte degenera} \end{cases}$$

Lo spettro di H_s è dato dagli stati

$$|n0\rangle \rightarrow \text{degen. } n^2 \quad (30)$$

$$|n1\rangle \rightarrow \text{degen. } 3n^2$$

dove n è il numero quantico principale dell'atomo di idrogeno e s è il valore dello spin totale, con autovalori dati dalle eq. (2), (6), (29)

4) L'operatore di evoluzione temporale è

$$S = e^{-\frac{i}{\hbar} H} = e^{-\frac{i}{\hbar} H_n} e^{-\frac{i}{\hbar} H_s} \quad (31)$$

poiché $[H_n, H_s]$. Poiché il sistema è in un autostato di H_n si ha

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_0} |0\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} H_s} |\uparrow\downarrow\rangle \quad (32)$$

dove E_0 è l'energia dello stato fond. dell'atomo di idrogeno eq. (6) con $n=1$ e $|0\rangle$ è lo stato fond. dell'atomo di idrogeno.

Ora ricordiamo che

$$|S_t = 1, S_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (33)$$

$$|S_t = 0, S_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

e quindi

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|110\rangle + |100\rangle) \quad (34)$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|110\rangle - |100\rangle)$$

Pertanto

$$e^{-\frac{i\hbar}{\hbar} H_0} |\uparrow\downarrow\rangle = \frac{e^{-\frac{i\hbar}{\hbar} H_0}}{\sqrt{2}} (|110\rangle + |100\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{i\hbar}{\hbar}} |110\rangle + e^{-\frac{3i\hbar}{\hbar}} |100\rangle \right) \quad (35)$$

sostituendo la (35) nella (32) si ottiene $|\psi(t)\rangle$

5) Le eq. (35)-(34) mostrano che la $|\psi(t)\rangle$ è una sovrapp. degli stati $|\uparrow\downarrow\rangle$ e $|\downarrow\uparrow\rangle$. Infatti:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-\frac{i\hbar}{\hbar} E_0} |10\rangle \left(e^{\frac{i\hbar}{\hbar}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + e^{-\frac{3i\hbar}{\hbar}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \right) \quad (36)$$

$$= e^{-\frac{i\hbar}{\hbar} E_0} |10\rangle e^{-\frac{i\hbar}{\hbar}} \left(\frac{e^{\frac{2i\hbar}{\hbar}} + e^{-\frac{2i\hbar}{\hbar}}}{2} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{e^{\frac{2i\hbar}{\hbar}} - e^{-\frac{2i\hbar}{\hbar}}}{2} |\downarrow\uparrow\rangle \right) \quad (37)$$

(5)

Pertanto

$$(a) P(t) = |\langle \uparrow \downarrow | \psi(t) \rangle|^2 = \left| \frac{e^{\frac{2it\lambda}{\hbar}} - e^{-\frac{2it\lambda}{\hbar}}}{2} \right|^2 = \sin^2 \frac{2it\lambda}{\hbar} \quad (38)$$

$$(b) P(t) = |\langle \downarrow \downarrow | \psi(t) \rangle|^2 = 0 \quad (39)$$

b) Lo spettro imperturbato è stato determinato alla domanda 3. La perturbazione al primo ordine è

$$\Delta E_{S_t S_t^z} = \langle \xi S_t^z | H_S^{(1)} | S_t S_t^z \rangle \quad (40)$$

dove $S_t = 1, 0$ è lo spin totale e S_t^z i corrisp. valori della terza componente dello spin totale.

Si ha quindi

stati impert. degeneri $|1-1\rangle, |10\rangle, |11\rangle$:

$$\langle 11 | H_S^{(1)} | 11 \rangle = \langle \uparrow \uparrow | -\frac{1}{2} \mu \xi | \uparrow \uparrow \rangle = -\frac{\mu}{2}$$

$$\langle 10 | H_S^{(1)} | 10 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \uparrow \downarrow | + \langle \downarrow \uparrow |) H_S^{(1)} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \downarrow\rangle + |\downarrow \uparrow\rangle) = 0 \quad (41)$$

$$\langle 1-1 | H_S^{(1)} | 1-1 \rangle = \langle \downarrow \downarrow | H_S^{(1)} | \downarrow \downarrow \rangle = +\frac{\mu}{2}$$

stato impert. $|00\rangle$

$$\langle 00 | H_S^{(1)} | 00 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \uparrow \downarrow | + \langle \downarrow \uparrow |) H_S^{(1)} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \downarrow\rangle - |\downarrow \uparrow\rangle) = 0 \quad (42)$$

Pertanto la pert. rimuove la degenerazione rispetto a $S_t^z = 0$