Meccanica Quantistica I

14 - 9 - 2009

Traccia di soluzione

1) Si ha

$$[\eta_i, \eta_j^\dagger] = \frac{1}{\cancel{2} m\omega\hbar} \cancel{2} [p_i, i m \omega q_j] = \delta_{ij} \quad (1)$$

$$[\eta_i, \eta_j] = [\eta_i^\dagger, \eta_j^\dagger] = 0 \quad (2)$$

Inoltre

$$\eta_i^\dagger \eta_i = \frac{1}{2m\omega\hbar}\left(p_i^2 + m^2\omega^2 q_i^2\right) + \frac{i m \omega}{2m\omega\hbar}[q_i, p_i] \quad (3)$$

da cui

$$H = H_1 + H_2 \quad (4)$$

$$H_i = \eta_i^\dagger \eta_i + \frac{1}{2} \quad (5)$$

Gli operatori $\eta_i^\dagger, \eta_i$ sono risp. op. di creazione e distruzione per l'oscillatore lungo l'i-esimo asse.

Nota:

Gli operatori η differiscono per una fase dagli operatori

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q + \frac{i p}{m\omega}\right) \quad (6)$$

introdotti a lezione. Infatti si ha

$$a = i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + q\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(p - iq\, m\omega\right) = i\eta \qquad (7)$$

Ovviamente, sia i commutatori eq. (2) che l'espressione della hamiltoniana eq. (5) sono invariati sotto questa ridefinizione.

2) Lo spettro di H_i è come quello dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad n \text{ intero} \geq 0 \qquad (8)$$

Pertanto lo spettro di H, visto che $[H_1, H_2] = 0$ è

$$H|n_1 n_2\rangle = \left(E_{n_1} + E_{n_2}\right)|n_1 n_2\rangle \qquad (9)$$

con $$|n_1 n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \qquad (10)$$

Quindi lo spettro è

$$E_N = (N+1)\hbar\omega \quad , N \text{ intero} \geq 0 \qquad (11)$$

e la degenerazione è data dal numero di coppie di interi n_1, n_2 tali che

$$n_1 + n_2 = N \qquad (12)$$

ossia $$d = N+1 \qquad (12')$$

visto che $n_1 = 0, 1, \ldots, N$, dopodiché $n_2 = N - n_1$

3) $$[j_1, j_2] = \frac{1}{4i}\left[\eta_1^\dagger \eta_2 + \eta_2^\dagger \eta_1, \eta_1^\dagger \eta_2 - \eta_2^\dagger \eta_1\right] =$$

$$= \frac{1}{4i}\left([\eta_1^\dagger \eta_2, -\eta_2^\dagger \eta_1] + [\eta_2^\dagger \eta_1, \eta_1^\dagger \eta_2] \right) =$$

$$= \frac{2}{4i}\left(-\eta_1^\dagger \eta_1 + \eta_2^\dagger \eta_2\right) = \frac{i}{2}\left(\eta_1^\dagger \eta_1 - \eta_2^\dagger \eta_2\right)$$

$$= i\, j_3 \qquad (13)$$

Analogamente si trovano i commutatori $[j_1, j_3]$ e $[j_2, j_3]$. Raccogliendo i risultati si ha

$$[j_i, j_j] = i \varepsilon_{ijk}\, j_k \qquad (14)$$

Un modo più compatto di arrivare allo stesso risultato è di osservare che

$$j_i = \sum_{a,b=1}^{2} \eta_a^\dagger\, \sigma^i_{ab}\, \eta_b \qquad (15)$$

dove σ^i sono le matrici di Pauli.
Si ha (indici ripetuti sommati)

$$[j_i, j_j] = [\eta_a^\dagger \eta_b, \eta_c^\dagger \eta_d]\, \sigma^i_{ab} \sigma^j_{cd}$$

$$= \left(\delta_{bc}\, \eta_a^\dagger \eta_d - \delta_{ad}\, \eta_b \eta_c^\dagger\right) \sigma^i_{ab}\, \sigma^j_{cd} = \qquad (16)$$

$$= \eta_a^\dagger \left([\sigma^i, \sigma^j]\right)_{ab} \eta_b = i \varepsilon^{ijk}\, \eta_a^\dagger \sigma^k_{ab} \eta_b =$$

$$= i \varepsilon^{ijk}\, j^k \qquad (16)$$

4) Utilizzando l'espressione eq. (5) dell'hamiltoniana ed i commutatori eq. (1) si trova

$$[H, \eta_i^\dagger \eta_j] = 0 \tag{17}$$

per ogni i, j.

Pertanto H si può diagonalizzare simultaneamente a qualunque dei j_i e a j^2. D'altra parte la eq. (14) implica che due diversi j_i, j_j con $i \neq j$ non si possono diagonalizzare simultaneamente. Pertanto, si possono diagonalizzare simultaneamente H, j^2, ed uno a scelta tra i tre j_i.

5) Il generatore delle rotazioni nel piano è il momento angolare lungo l'asse perpendicolare al piano, a meno di un fattore $\hbar$: esso è quindi

$$\frac{L}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\left(q_1 p_2 - q_2 p_1\right) \tag{18}$$

D'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned} j_2 = \frac{1}{2i}\frac{1}{2m\omega\hbar}\Big[& (p_1 + im\omega q_1)(p_2 - im\omega q_2) + \\ & - (p_2 + im\omega q_2)(p_1 - im\omega q_1)\Big] = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{m\omega\hbar} & (-i)\, m\omega\,(p_1 q_2 - p_2 q_1) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L}{\hbar} \qquad (19)$$

Cioè j_z è pari a $1/2$ il generatore delle rotazioni.

Determiniamo ora lo spettro. La identità data implica che lo spettro di j^2 e lo spettro di H sono legati.

Poiché ~~gli~~ j_i hanno le relazione di commutazione degli op. di momento angolare (a meno di $\hbar$), lo spettro di j^2 è

$$j^2 |j\rangle = j(j+1)|j\rangle \qquad (20)$$

dove j è intero o semi-intero. Per fissato j^2, possiamo anche diagonalizzare j_z

$$j_z |jm\rangle \doteq m|jm\rangle \qquad (21)$$

con

$$-j \le m \le j \qquad (22)$$

La eq. (19) implica che $m = \frac{\ell}{m}$ dove ℓ è un autovalore del momento angolare orbitale nel piano. ~~Pertanto~~ Il momento angolare orbitale deve essere intero, ma quindi la (19) implica che m può essere sia intero che semi-intero, e perciò anche j può essere sia intero che semi intero.

Ponendo

$$j = \frac{N}{2} \qquad N \text{ intero} \ge 0 \qquad (23)$$

abbiamo così che lo spettro di H, usando la identità nel testo, è dato da

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{24}$$

con

$$\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right) = \frac{1}{4\hbar^2\omega^2}\left(E_n^2 - \hbar^2\omega^2\right) \tag{25}$$

ossia

$$E_n^2 = \hbar^2\omega^2\left(N(N+2) + 1\right)$$

$$= \hbar^2\omega^2(N+1)^2 \tag{26}$$

da cui

$$E_N = \pm\hbar\omega(N+1)\,. \tag{27}$$

Poiché il potenziale dato ammette stati legati lo spettro deve essere limitato inferiormente, perciò solo la soluzione con il segno + è fisica, e troviamo quindi

$$E_N = \hbar\omega(N+1) \tag{28}$$

in accordo con la eq.(12).

Inoltre per ogni stato abbiamo $2j+1$ valori di m (autovalore di j_z) associati allo stesso autovalore di j^2 e quindi anche di energia. Pertanto la degenerazione è (usando la eq.(23))

$$d = 2j+1 = N+1$$

in accordo con la eq. (12')

7) Il secondo livello eccitato, etichettando gli stati con n_1, n_2 eq. (8-10) corrisponde ai ~~quattro~~ tre stati degeneri

$$|n_1 n_2\rangle = |2,0\rangle, |1,1\rangle, |0,2\rangle .$$

La matrice della perturbazione in questi stati è

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Infatti

$$\begin{array}{ll} a|2\rangle = \sqrt{2}\,|1\rangle & a^+|0\rangle = |1\rangle \\ a|1\rangle = |0\rangle & ; \quad a^+|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \end{array} \tag{30}$$

quindi

$$a^+a^+aa|2\rangle =$$
$$= a^+a^+a|1\rangle\sqrt{2}$$
$$= a^+a^+|0\rangle\sqrt{2} = 2|2\rangle \tag{31}$$

Gli autovalori di questa matrice ~~sono~~ si trovano imponendo

$$\det(\mu 1\!\!1 + H) = 0$$

da cui

$$\mu^3 - (2\varepsilon)^2\mu = 0 \tag{32}$$

e quindi

$$\mu = 0, \pm 2\varepsilon \tag{33}$$

Pertanto il livello dato si separa in tre livelli aventi energia E_2, $E_2 \pm 2\varepsilon$. (34)