Meccanica Quantistica

22 - 9 - 2011

Traccia di soluzione

1) Il problema é separabile nella somma di due oscill. armonici

$$H = H_1 + H_2$$
$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_i^2 \qquad (1)$$

gli op. dati sono gli op. di creazione e distruzione per i due osc. armonici, quindi

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \; ; \quad [a_i^\dagger, a_j] = -\delta_{ij} \qquad (2)$$

$$H = \sum_{i=1}^{2} \hbar\omega \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \qquad (3)$$

Lo spettro é quindi

$$E_N = \hbar\omega (N+1) \qquad (4)$$

con $\qquad N = n_1 + n_2 \qquad , n_i$ interi $\geq 0 \qquad (5)$

e la deg. é pari a $N+1$ (numero di coppie di interi con somma fissata)

2) $$[a_i^\dagger a_j, H] = \sum_k \hbar\omega \left([a_i^\dagger, a_k^\dagger a_k] a_j + a_i^\dagger [a_j, a_k^\dagger a_k] \right) =$$

$$= \hbar\omega \left(-a_i^\dagger a_j + a_i a_j \right) = 0 \qquad (6)$$

Gli operatori dati commutano tutti con l'hamiltoniana.

Ciascuno di essi può quindi essere diagonalizzato simultaneamente all'hamiltoniana. Non è detto però che essi possano essere diagonalizzati simultaneamente, perché in generale η_{ij} e η_{ab} non commutano tra loro.

3) Il livello E_2 è tre volte degenere: usando gli autostati di H Eq. (3) con $|n_1 n_2\rangle$ esso corrisponde ai tre stati

$$|1\rangle \equiv |2,0\rangle \quad , |2\rangle \equiv |1,1\rangle \quad , |3\rangle \equiv |0,2\rangle \tag{7}$$

L'elemento di matrice H' negli stati $|i\rangle$, $i=1,2,3$ è

$$\langle i | H' | j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 \\ \sqrt{2}\lambda & 0 & \sqrt{2}\lambda \\ 0 & \sqrt{2}\lambda & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

4) La correzione perturbativa all'energia si ottiene diagonalizzando la matrice (8). Risolvendo il semplice sistema lineare si trovano gli autovettori ed autovalori:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \Delta E^{(1)} = 2\lambda \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \Delta E^{(2)} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \Delta E^{(3)} = -2\lambda \tag{9}$$

Al primo ordine la perturbazione rimuove la degenerazione, ed i tre stati di base perturbati sono

$$\begin{aligned} |1'\rangle &= \frac{1}{2}\left(|2,0\rangle + \sqrt{2}\,|1,1\rangle + |0,2\rangle\right) \\ |2'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,0\rangle - |0,2\rangle\right) \\ |3'\rangle &= \frac{1}{2}\left(|2,0\rangle - \sqrt{2}\,|1,1\rangle + |0,2\rangle\right) \end{aligned} \tag{10}$$

5) Possiamo scrivere la eq. (5) nella forma

$$A_i = R_{ij}\, a_j \tag{11}$$

dove R_{ij} è una matrice di rotazione di angolo θ.

Si ha ovviamente

$$[A_i, A_j] = [A^\dagger_i, A^\dagger_j] = 0 \tag{12}$$

Inoltre (notando che R_{ij} è reale)

$$[A^{\dagger i}, A^j] = R^i{}_a\, R^j{}_b\, [a^\dagger_a, a_b] = -R^i{}_a\, R^j{}_b\, \delta_{ab} = (R^T R)_{ab} = \delta_{ab} \tag{13}$$

dove R^T è la matrice trasposta e abbiamo usato il fatto che una matrice di rotazione è ortogonale (cioè $R^T = R^{-1}$).

6) Sfruttando di nuovo l'ortogonalità della matrice R si vede che, posto

$$a_i = R^{-1}{}_{ij}\, A_j\,, \tag{14}$$

allora

$$H = \hbar\omega \sum_k \left(a^\dagger_k a_k + \frac{1}{2}\right) \tag{15}$$

$$= \hbar\omega \sum_k \left(R_{ki}\, R_{kj}\, a^\dagger_i a_j + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega \sum_k \left(A^\dagger_k A_k + \frac{1}{2}\right) \tag{16}$$

quindi la forma dell'hamiltoniana imperturbata resta invariata passando dagli a_i agli A_i, per qualunque ϑ.
Per la perturbazione, consideriamo il caso richiesto $\vartheta = \frac{\pi}{4}$

Si ha

$$A_1 = \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}} \qquad A_2 = \frac{-a_1 + a_2}{\sqrt{2}} \qquad (17)$$

e quindi

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + A_2) \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - A_2) \qquad (18)$$

Pertanto

$$H' = \frac{\lambda}{2}\Big[(A_1^+ + A_2^+)(A_1 - A_2) + (A_1^+ - A_2^+)(A_1 + A_2)\Big] =$$

$$= \lambda\left(A_1^+ A_1 - A_2^+ A_2\right) \qquad (19)$$

Quindi l'ham. perturbata è

$$H + H' = (\hbar\omega + \lambda) A_1^+ A_1 + (\hbar\omega - \lambda) A_2^+ A_2 + \hbar\omega \quad (20)$$

Il suo spettro è dato da

$$E_{n_1 n_2} = n_1(\hbar\omega + \lambda) + n_2(\hbar\omega - \lambda) + \hbar\omega \qquad (21)$$

$$= \hbar\omega (n_1 + n_2 + 1) + \lambda (n_1 - n_2) \qquad (22)$$

Pertanto le energie dei tre livelli $|2\,0\rangle$, $|1\,1\rangle$, $|0\,2\rangle$ sono

$$E^{(1)} = 3\hbar\omega + 2\lambda$$
$$E^{(2)} = 3\hbar\omega \qquad (23)$$
$$E^{(3)} = 3\hbar\omega - 2\lambda$$

Se ne conclude che il risultato perturbativo al primo ordine é esatto.

7) si ha $$[j^a, j^b] = \sum_{ijmn} [a_i^\dagger a_j, a_m^\dagger a_n]\, \sigma^a_{ij}\, \sigma^b_{mn}$$

$$= \left(\sum_{ijmn} a_m^\dagger [a_i^\dagger, a_n] a_j + a_i^\dagger [a_j, a_m^\dagger] a_n \right) \sigma^a_{ij}\, \sigma^b_{mn}$$

$$= \sigma^a_{ij}\, \sigma^b_{jn}\; a_i^\dagger a_n - \sigma^b_{m}\, \sigma^a_{n}\; a_m^\dagger a_n$$

$$= \left([\sigma^a, \sigma^b] \right)_{ij}\; a_i^\dagger a_j =$$

$$= \varepsilon^{abc}\, \sigma^c_{ij}\, a_i^\dagger a_j = \varepsilon^{abc} j^c \qquad (24)$$

Pertanto, gli op. j^a hanno le relazioni di commutazione degli operatori di momento angolare.

Nel caso perturbato, ne deduciamo che vi sono tre operatori che commutano con l'hamiltoniana, ma non fra loro. Possiamo quindi diagonalizzare simultaneamente H e modo tre j^i. La presenza di ulteriori op. che commutano con H ma non con esso spiega la degenerazione.

Nel caso perturbato, notiamo che la perturbazione è proporzionale all'op. j_1. Poiché tale op. commuta con l'hamiltoniana, esso può essere diagonalizzato simultaneamente ad essa e lo spettro si determina in modo esatto nella base degli autostati simultanei di H e j_1. Questa è la base che si è costruita al punto 6