PROBLEMI DI MECCANICA QUANTISTICA

anno accademico 2006-2007

(1) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$

(2) Per un sistema di due corpi, con funzione d'onda $\langle \vec{x}_1\vec{x}_2|\psi\rangle = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, considerare l'operatore di parità $\mathcal{P}$ e l'operatore di scambio $\mathcal{S}$, definiti rispettivamente da $\langle \vec{x}_1\vec{x}_2|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-\vec{x}_1, -\vec{x}_2)$ e $\langle \vec{x}_1\vec{x}_2|\mathcal{S}|\psi\rangle = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. Determinare l'azione degli operatori $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{S}$ esprimendo $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ in coordinate del baricentro e relativa, e scrivendo queste ultime in coordinate sferiche.

(3) Per un sistema *bidimensionale*, determinare l'operatore (hermitiano) impulso radiale, ed determinare l'operatore energia cinetica esplicitamente in coordinate polari (r, θ),

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

(4) Determinare la legge di evoluzione temporale per il valore medio dell'operatore momento angolare: $\frac{d}{dt}\langle \vec{L}\rangle$. Sotto quali condizioni essa coincide con la legge del moto classica?

(5) Determinare il risultato di una misura dell'operatore $\vec{L}$ lungo l'asse $\vec{p}$ per un autostato dell'operatore impulso $\hat{\vec{p}}$ associato all'autovalore $\vec{p}$.

(6) Determinare i valori medi di L_x, L_y, L_x^2 ed L_y^2 in un autostato di L^2 ed L_z

(7) Determinare le matrici di L_x, L_y ed L_z *nella base degli autostati di* L_z, ossia gli elementi di matrice $\langle 1, m|L_i|1, m'\rangle$. Determinare la trasformazione unitaria che realizza il cambiamento da questa base a quella (discussa a lezione) in cui gli elementi di matrice di L_i valgono $\langle j|L_i|k\rangle = -i\hbar\epsilon^{ijk}$.

(8) Considerare l'elemento di matrice del vettore di operatori di momento angolare in uno stato qualunque di spin $\frac{1}{2}$: $\vec{v} \equiv \langle\psi|\vec{L}|\psi\rangle$, con $L^2|\psi\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\psi\rangle$. Dimostrare che se si esegue una rotazione di $|\psi\rangle$ l'elemento di matrice si trasforma come un vettore sotto rotazioni, cioè dimostrare che se $\vec{v}' \equiv \langle\psi|R^{-1}(\vec{e}, \theta)\vec{L}R(\vec{e}, \theta)|\psi\rangle$, dove $R(\vec{e}, \theta)$ è una rotazione di angolo θ attorno all'asse $\vec{e}$ dello stato (di spin $\frac{1}{2}$) $|\psi\rangle$, allora $\vec{v}' = R(\vec{e}, \theta)\cdot\vec{v}$, dove $R(\vec{e}, \theta)$ è una rotazione di angolo θ attorno all'asse $\vec{e}$ del vettore $\vec{v}$.
Suggerimento: considerare dapprima il caso di rotazioni infinitesime.

(9) Determinare lo spettro di autostati ed autovalori di energia per un sistema di due particelle di massa m e spin $\frac{1}{2}$, descritte dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 + B\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$$

.

(10) Considerare un sistema di una particella soggetta ad un potenziale centrale $V(r)$. Determinare la Hamiltoniana e le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg in un sistema di riferimento rotante con velocita ω intorno ad un asse qualunque. Specificare un inisieme di operatori commutanti con l'hamiltoniana i cui autovalori determinano completamente lo stato del sistema, e determinare la degenerazione degli autostati di energia.

(11) Determinare l'andamento asintotico per $r \to \infty$ delle autofunzione dell'oscillatore armonico isotropo in coordinate sferiche.
Suggerimento: Costruire le autofunzioni mediante gli operatori d_ℓ e $d_\ell^\dagger$ discussi a lezione.

(12) Per un sistema tridimensionale soggetto al potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r^p}$$

(con κ costante reale positiva) determinare la dipendenza degli autovalori di energia da κ e dalla massa m.
Suggerimento: Eliminare la dipendenza da κ, $\hbar$ ed m dall'equazione di Schrödinger radiale attraverso una ridefinizione di r.
Dato uno stato avente funzione d'onda $\psi(r)$, si consideri l'insieme di stati (correttamente normalizzati) $\psi(\lambda r)$. Discutere come variano il valor medio dell'energia cinetica $\langle T \rangle$ e dell'energia potenziale $\langle V \rangle$ in tale famiglia di stati al variare di λ. Che cosa succede se $p > 2$?

(13) Dimostrare che per il sistema dell'esercizio precedente in un autostato di energia $\langle T \rangle$ e $\langle V \rangle$ sono proporzionali, e determinare il coefficiente di proporzionalità.
Suggerimento: Sfruttare l'indipendenza dal tempo degli elementi di matrice di qualunque operatore in uno stato stazionario, ed applicarla all'operatore viriale $\vec{x} \cdot \vec{p}$.

(14) Determinare il valore medio di r e di r^2 e la posizione del massimo della densità di probabilità radiale $\rho(r)$ nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Confrontare il risultato con il raggio dell'orbita nel modello di Bohr.

(15) Risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi (classica) per la funzione $S(q)$ per (a) un oscillatore armonico unidimensionale e (b) una particella libera tridimensionale, ed utilizzare il risultato per determinare la legge del moto nei due casi.

(16) Dimostrare le seguenti proprietà del propagatore $K(x', t'; x, t) \equiv \langle x', t' | x, t \rangle$ usando la rappresentazione di $K(x', t'; x, t)$ come integrale di cammino:
(a) $\int dx' K(x'', t''; x', t') K(x', t'; x, t) = K(x'', t''; x, t)$
(b) $K^*(x', t'; x, t) = K(x, t; x', t')$
(c) se il sistema è invariante per traslazioni, $K(x', t'; x, t) = K(x' - x, t', t)$
(d) se il sistema è invariante per traslazioni temporali, $K(x', t'; x, t) = K(t' - t, x', x)$

(e) $K(x', t; x, t) = \mathbb{1}$.

Verificare esplicitamente che esse sono soddisfatte dal propagatore per la particella libera unidimensionale

$$K(x', t'; x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t'-t)}} \exp\left[\frac{im\,(x'-x)^2}{2\hbar(t'-t)}\right].$$

(17) Considerare un sistema unidimensionale descritto dal potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & x > a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2 & x < -a \end{cases}.$$

Determinare lo spettro usando l'approssimazione WKB. Discutere il risultato nei limiti in cui $a << L$ ed $a >> L$, dove $L \equiv \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Discutere la validità dell'approssimazione semiclassica.

(18) Considerare due atomi di idrogeno che interagiscono attraverso il potenziale (potenziale di van der Waals)

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{e^2}{R^3}\left(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 - 3z_1 z_2\right),$$

dove z_1 è la terza componente di $\vec{x}_1$ e z_2 è la terza componente di $\vec{x}_2$, ed R è la separazione dei nuclei dei due atomi (da prendere come parametro fissato). Determinare la perturbazione all'energia dello stato fondamentale del sistema di due atomi dovuta al potenziale dato. Per ottenere il risultato finale fare l'approssimazione $E_1 - E_n \approx E_1$, dove E_n sono i livelli energetici dell'atomo di idrogeno imperturbato.

(19) Determinare come vengono modificati al primo ordine perturbativo i primi due livelli ($n = 1$ ed $n = 2$) dell'atomo di idrogeno da un campo elettrico costante, avente potenziale

$$V = -eEz$$

(effetto Stark).

(20) Si determini la correzione al primo ordine agli autovalori ed autovettori dell'atomo di idrogeno dovuta all'*interazione spin–orbita*

$$V = \frac{e^2}{2m^2c^2r^3}\vec{L} \cdot \vec{S},$$

dove $\vec{L}$ e $\vec{S}$ sono rispettivamente gli operatori momento angolare orbitale e spin.
Suggerimento: Utilizzare il risultato

$$\langle nl|\frac{1}{r^3}|nl\rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3a_0^3},$$

dove a_0 è il raggio di Bohr.

(21) Considerare un oscillatore armonico che si trova nello stato fondamentale, e sui cui a partire da t=0 agisce la perturbazione

$$V(q,t) = Aq^2 e^{-bt}.$$

Determinare il rapporto tra la probabilità che al tendere di $t \to \infty$ il sistema subisca una transizione all'n–esimo stato eccitato, e la probabilità che essi resti nello stato fondamentale.

(22) Considerare due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ in una buca di potenziale unidimensionale infinita di lunghezza L, aventi entrambe spin $s_z = \frac{1}{2}$. Scrivere l'autofunzione e l'autovalore di energia corrispondenti allo stato fondamentale.

(23) In un gas di particelle di spin $\frac{1}{2}$, una frazione p delle particelle ha $s_z = \frac{1}{2}$, mentre lo spin della restante frazione $1-p$ di particelle è distribuito in modo casuale. Determinare la matrice densità del sistema ed i valori medi dello spin lungo gli assi x, y e z. Determinare inoltre il valore massimo dello spin lungo l'asse x qualora lo spin della frazione restante $1-p$ sia distribuito in modo non casuale, ma ignoto.