# PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

FISICA MODERNA
anno accademico 2007-2008

(1) Sia dato un sistema che può trovarsi in tre stati esclusivi $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, e si supponga che esso si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}|3\rangle.$$

(a) Qual è la probabilità che una misura del sistema riveli che esso si trova in ciascuno dei suoi tre stati possibili?
(b) Supponiamo che una misura del sistema possa solo rivelare se esso si trova o no nello stato $|1\rangle$. Qual è la probabilità che tale misura riveli che il sistema *non* si trova nello stato $|1\rangle$?
(c) Supponamo di effettuare dapprima questa misura (che ci dice se il sistema si trova o meno nello stato $|1\rangle$), e se questa misura dà risultato negativo (cioè il sistema non si trova nello stato $|1\rangle$) una successiva misura che dice se il sistema si trova nello stato $|2\rangle$ o nello stato $|3\rangle$. Qual è la probabilità di effettuare questa sequenza di misure e trovare che il sistema si trova nello stato $|3\rangle$? Confrontare il risultato con quello trovato nel caso (a).

(2) Se $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ sono i vettori di stato dell'esercizio precedente, sotto quali condizioni su $x$ e $A_i$ i vettori

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= A_1\,(|1\rangle + x|3\rangle)\\ |\psi_2\rangle &= A_2\,(x|2\rangle + |3\rangle)\\ |\psi_3\rangle &= A_3\,((1+x)|1\rangle + x|2\rangle + |3\rangle)\end{aligned}$$

formano una base?

(3) Siano dati due operatori hermitiani $A = A^\dagger$ e $B = B^\dagger$, e si consideri l'operatore

$$C = AB.$$

Si dimostri che $C = C^\dagger$ se e solo se $AB = BA$.

(4) Sia dato un operatore hermitano $B$. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché l'operatore $B' = ABA^{-1}$ sia anch'esso hermitiano è che $A^\dagger A = k\,\mathbb{1}$ dove $\mathbb{1}$ è l'operatore identità. *Suggerimento*: dimostrare dapprima che affinché la condizione sia soddisfatta $A^\dagger A$ deve commutare con qualunque operatore.

(5) Si consideri l'operatore hermitiano avente elementi di matrice $\langle i|A|j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si dimostri che gli stati aventi componenti $\langle i|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\langle i|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\langle i|\psi_3\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autostati di questo operatore, e che questi stati formano una base ortonormale; si determini inoltre lo spettro (degenere) di autovalori associati.

(b) Si considerino quindi gli operatori aventi elementi di matrice $\langle i|B_1|j\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\langle i|B_2|j\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si dimostri che uno di questi operatori è compatibile con $A$ e l'altro no. Per quello compatibile, se ne determini una base di autovettori comune con $A$, e si dimostri che assieme ad $A$ esso fornisce un insieme completo di operatori nello spazio dato. Per quello non compatibile, si determini l'indeterminazione minima della misura di tale operatore in uno stato qualunque in termini dell'indeterminazione della misura di $A$ in quello stato.

(6) Determinare la matrice densità $\rho$ per un sistema che si trova nello stato (puro) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1+i}{2}|-\rangle$: (a) scrivere gli elementi di matrice di $\rho$ e (b) determinare la rappresentazione di $\rho$ sulla base delle matrici di Pauli, ovvero le componenti del vettore $\vec{a}$ tale che $\rho = \mathbb{1} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$.

(7) (a) Determinare la matrice densità per un sistema bipartito che si trova con probabilità $\frac{1}{2}$ in ciascuno dei due stati $|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$, $|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$, e dimostrare che essa coincide con la matrice densità per un sistema che si trova con probabilità $\frac{3}{4}$ nello stato $|+\rangle$ e con probabilità $\frac{1}{4}$ nello stato $|-\rangle$.

(b) Dimostrare che la matrice densità $\rho = \sum_i p_i |e_i\rangle\langle e_i|$ è invariante sotto un cambiamento di base realizzato da una matrice unitaria $U = \sum_j |e_j\rangle\langle e_j'|$.

(8) Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione tale per cui, nei punti $x = x_i$, $f(x_i) = 0$ ma $f'(x_i) \neq 0$, allora

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|f'(x)\right|_{x=x_i}}.$$

(9) Determinare autovalori ed autofunzioni dell'operatore $\mathcal{P}$ tale che

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle.$$

Discutere se questo operatore è unitario e/o hermitiano.

(10) Determinare mediante il teorema di Noether la quantità (detta viriale) che è classicamente conservata quando vi è invarianza per dilatazioni, ovvero sotto la trasformazione

$q \to q' = \lambda q$. Determinare quindi l'operatore che genera le dilatazioni sugli stati quantistici. Verificare che questo operatore coincide con quello che si ottiene dal viriale classico usando il principio di corrispondenza $p \to \hat{p}$, $q \to \hat{q}$.

(11) Dimostrare che

$$[\mathcal{P}, |\hat{p}|] = 0,$$

dove l'operatore $|\hat{p}|$ è definito come

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar |k| |k\rangle\langle k|$$

in termini degli autostati $|k\rangle$ dell'operatore impulso, che soddisfano a

$$\hat{p}|k\rangle = \hbar k |k\rangle.$$

Determinare le autofunzioni comuni agli operatori $\mathcal{P}$ e $|\hat{p}|$.

(12) Si consideri un sistema che può trovarsi in due stati esclusivi $|1\rangle$, $|2\rangle$, e la cui evoluzione temporale è governata dall'hamiltoniana

$$H = E_0 \left( |1\rangle\langle 1| + \sqrt{2}|1\rangle\langle 2| + \sqrt{2}|2\rangle\langle 1| \right).$$

Si supponga di misurare il sistema al tempo $t = 0$ e di trovare che esso si trova nello stato $|1\rangle$. Se si ripete la misura al tempo $t$, qual è la probabilità di trovare il sistema nello stato $|2\rangle$?

(13) Calcolare il commutatore $[[H, \hat{q}], \hat{q}]$ per un'hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$$

ed utilizzare il risultato per dimostrare che

$$\sum_n |\langle k|\hat{q}|n\rangle|^2 (E_n - E_k) = \frac{\hbar^2}{2m},$$

dove $|n\rangle$ sono autostati dell'hamiltoniana ed $E_n$ gli autovalori associati:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle.$$

(14) Determinare la dipendenza dal tempo dell'operatore viriale $G_D = \frac{1}{2}(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})$ per una hamiltoniana della forma $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$. Sotto che condizione si ha

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|G_D|\psi\rangle = 0?$$

(15) Determinare la dipendenza dal tempo degli operatori posizione ed impulso in rappresentazione di Heisenberg per un sistema unidimensionale soggetto ad un potenziale armonico, cioè con hamiltoniana della forma $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$ e $V(\hat{q}) = \frac{1}{2} m\omega \hat{q}^2$.

(16) Considerare una particella libera unidimensionale. Sia $|k\rangle$ un autostato dell'impulso al tempo $t = 0$, e $|k, t\rangle$ il suo evoluto temporale: $|k, t\rangle = S(t)|k\rangle$. Scrivere gli elementi di matrice $\langle k, t|\hat{p}|k', t\rangle$ e $\langle k, t|\hat{q}|k', t\rangle$ utilizzando la base delle coordinate e la rappresentazione di Schrödinger, ossia ponendo $\langle q|k, t\rangle = \psi_k(q, t)$. Dimostrare (senza usare la rappresentazione di Heisenberg) che questi elementi di matrice soddisfano le leggi del moto

$$\langle k, t|\hat{p}|k', t\rangle = \langle k|\hat{p}|k'\rangle$$
$$\langle k, t|\hat{q}|k', t\rangle = \langle k|\hat{q}|k'\rangle + \frac{t}{m}\langle k, t|\hat{p}|k', t\rangle.$$

(17) Considerare una particella libera e suppore che si possa eseguire una misura di posizione su di essa al tempo $t = 0$, dopo la quale la particella si trova in un autostato di posizione $x = x_0$. Determinare la funzione d'onda di questa particella ad un tempo qualunque $t$ (questa funzione d'onda è detta propagatore di Feynman).
*Suggerimento:* per calcolare l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp i \left(\lambda x^2 + \beta x\right)$, con $\lambda$ reale positivo, sostituire $\lambda$ con $\lambda' = \lambda + i\epsilon$ e porre $\epsilon = 0$ al termine del calcolo.

(18) Considerare una particella in una buca di potenziale infinita di semilarghezza $a$ centrata nell'origine. Determinare il valor medio di $\hat{x}$ e $\hat{p}$ per un generico autostato dell'energia. Considerare quindi un sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle\right),$$

dove $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato del sistema, correttamente normalizzati come $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = \langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1$. Determinare il valor medio di $\hat{p}$ per questo sistema, dapprima al tempo $t = 0$ e poi a qualunque tempo $t$.
*Suggerimento:* Si ricordino gli integrali

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x \sin x dx = \frac{4}{3}$$
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x \cos x dx = \frac{2}{3}.$$

(19) Dati gli operatori $a$ e $a^\dagger$ tali che $[a^\dagger, a] = -1$, si consideri un autostato dell'operatore $a$, ossia uno stato (detto stato coerente) $|z\rangle$ tale che

$$a|z\rangle = z|z\rangle.$$

Si determinino le componenti di $|z\rangle$ nella base degli autostati dell'operatore $N = a^\dagger a$.

(20) Dimostrare che per un qualunque sistema unidimensionale $\mathcal{P} = \exp(i\pi N)$, dove $\mathcal{P}$ è l'operatore parità introdotto nel problema 9, e $N = a^\dagger a$ è l'operatore numero.

(21) Determinare la funzione d'onda $\langle x|z(t)\rangle$ di uno stato coerente ad ogni tempo $t$ nella base delle coordinate.

(22) Sia data una autofunzione di energia $\psi_E(x)$ per un sistema unidimensionale in presenza di un gradino di potenziale. Si dimostri che anche $\psi_E^*(x)$ è un'autofunzione di energia. Supponendo che $\psi_E(x)$ corrisponda ad un'onda incidente sul gradino proveniendo da $x = -\infty$, si costruisca un'autofunzione di energia che corrisponde ad un'onda incidente sul gradino proveniendo da $x = +\infty$ e si determinino i coefficienti di trasmissione e riflessione corrispondenti.

(23) Si consideri un sistema unidimensionale soggetto al potenziale $V(x) = \kappa\delta(x)$, dove $\delta(x)$ è la delta di Dirac e $\kappa$ è una costante reale positiva. Si determinino i coefficienti di trasmissione e riflessione per un'onda piana incidente su questo potenziale proveniendo da $x = -\infty$.

(24) Si determinino le autofunzioni dell'hamiltoniana per un sistema unidimensionale soggetto al potenziale lineare $V(x) = \kappa x$, dove $\kappa$ è una costante reale positiva.