PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

MECCANICA QUANTISTICA
anno accademico 2008-2009

(1) Si esprima la delta di Dirac bidimensionale $\delta^{(2)}(\vec{x}-\vec{x}') = \delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2')$ in coordinate polari, definite come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho'\cos\theta' \\ \rho'\sin\theta' \end{pmatrix}$$

(2) In uno spazio d-dimensionale, determinare il generatore delle traslazioni lungo una direzione $\hat{n}$, dove $\hat{n}$ è un qualunque versore (vettore di norma uno) nello spazio dato, ed esprimere il risultato in termini dell'operatore impulso d-dimensionale $\hat{\vec{p}}$. Scrivere quindi l'operatore che realizza una traslazione finita di lunghezza k lungo $\hat{n}$, prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base delle coordinate.

(3) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$

(4) Dimostrare che $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\dagger = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)$ attraverso il calcolo dell'elemento di matrice $\langle\psi|\tilde{p}_r|\phi\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate, dove $\tilde{p}_r = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$.

(5) Determinare la dipendenza dal tempo degli elementi di matrice del momento angolare $\langle\vec{L}\rangle$ per un sistema tridimensionale avente una hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$.

(6) Determinare i valori delle indeterminazioni $(\Delta L_x)^2$ e $(\Delta L_x)^2$ in un autostato di L^2 ed L_z. Determinare inoltre gli stati "di minima indeterminazione" che minimizzano il valore del prodotto $\Delta L_x \Delta L_y$.

(7) terminare le matrici di L_x, L_y ed L_z *nella base degli autostati di* L_z, ossia gli elementi di matrice $\langle 1, m|L_i|1, m'\rangle$. Determinare la trasformazione unitaria che realizza il cambiamento da questa base a quella (discussa a lezione) in cui gli elementi di matrice di L_i valgono $\langle j|L_i|k\rangle = -i\hbar\epsilon^{ijk}$.

(8) Dimostrare che per un sistema di spin $\frac{1}{2}$ qualunque stato $|\psi\rangle$ è autostato di $\sigma\cdot\hat{n}$ per un opportuna scelta di $\hat{n}$, e determinare tale $\hat{n}$.

(9) Sia dato un sistema di tre particelle diverse di spin $\frac{1}{2}$, che interagiscono attraverso l'hamiltoniana

$$H = V\left(\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2 + \vec{s}_2\cdot\vec{s}_3 + \vec{s}_3\cdot\vec{s}_1\right),$$

dove $\vec{s}_i$ è l'operatoredi spin per la i–esima particella. Si determinino lo spettro degli autovalori di energia per questa hamiltoniana e la loro degenerazione.

(10) Sia dato un sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ che interagiscono attraverso la hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1 \vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2,$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare relativo del sistema di due particelle. Si separi completamente il problema, e supponendo noto e non-degenere lo spettro dell'hamiltoniana radiale, si determini lo spettro di H e la sua degenerazione.

(11) Si consideri una particella la cui dinamica è descritta da un potenziale centrale $V(r)$ rispetto ad un sistema di riferimento ruotante con velocità angolare costante ω attorno all'asse z. Si scriva l'hamiltoniana del sistema rispetto ad un sistema di riferimento fisso, e si determini la degenerazione degli stati del sistema.

(12) Si determini la funzione d'onda per lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico isotropo tridimensionale nella base delle coordinate, a partire dalla formulazione del problema in coordinate sferiche.

(13) Si consideri una particella di massa μ soggetta ad un potenziale centrale della forma $V(r) = \lambda^2 r^\alpha$. Si determini la dipendenza degli autovalori di energia dai parametri fisici μ, λ e α. Si supponga quindi che questo potenziale sia stato ottenuto da una interazione a due corpi tra particelle di massa m e M. Se la massa M viene rimpiazzata da una massa M', come variano gli autovalori di energia del sistema?

(14) Si calcoli la dipendenza dei valori medi dell'energia cinetica e potenziale $\langle T \rangle$ e $\langle V \rangle$ in un autostato di energia dell'atomo di idrogeno dalla massa m e dal quadrato della carica e^2 rispettivamente. Si utilizzi il risultato per dimostrare che $\langle V \rangle = -2\langle T \rangle$, e quindi per determinare esplicitamente il valore di questi elementi di matrice.

(15) Si determini il valor medio di r^k nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, con k intero. Si utilizzi il risultato per determinare in questo stato il valor medio della posizione radiale, la sua varianza, ed il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

(16) Si determini la azione classica in termini delle coordinate e dei tempi per (a) un oscillatore armonico e (b) una particella libera, entrambi unidimensionali. Nel caso dell'oscillatore armonico, utilizzare il risultato per determinare l'equazione del moto classico, che esprime la in funzione del tempo t. Nel caso della particella libera, si determini esplicitamente l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione temporale (propagatore)

$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t' | e^{\frac{1}{i\hbar} H(t'-t)} | q', t' \rangle$$

e si mostri che esso coincide con l'esponenziale di una quantità proporzionale all'azione classica.

(17) Si consideri un sistema unidimensionale descritto dal potenziale

$$V(x) = \begin{cases} Dx & x > a \\ 0 & -a < x < a \\ -Dx & x < -a \end{cases},$$

dove D è una costante reale positiva. Si scrivano le funzioni d'onda utilizzando l'approssimazione WKB nelle regioni $x << b$ e $x >> -b$, dove $b > a$ è il punto in cui l'energia è interamente potenziale, $E = V(b)$. Si determini lo spettro di valori permessi di E imponendo che nella regione centrale $x \approx 0$ queste due soluzioni coincidano.

(18) Si consideri un sistema tridimensionale soggetto al potenziale coulombiano per una distribuzione di carica sferica di raggio R e con carica totale Ze:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{r} & r > R \\ -\frac{Ze^2}{R}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] & r \leq R \end{cases}$$

(nucleo atomico di estensione finita). Si consideri questo potenziale come una perturbazione di quello dell'atomo di idrogeno, e si determini la correzione all'energia dello stato fondamentale al più basso ordine non banale in $\lambda \equiv \frac{R}{a_0}$, dove $a_0 = \frac{\hbar^2}{mZe^2}$.

(19) Si consideri un atomo di idrogeno soggetto ad un campo elettrico costante diretto lungo l'asse z (effetto Stark). Si determini la correzione all'energia del primo stato eccitato $n = 2$. Si determini inoltre l'elemento di matrice dell'operatore $\vec{x}$ (momento di dipolo) nello stato fondamentale: si dimostri che esso è nullo in assenza di perturbazione, e se ne scriva l'espressione al primo ordine in presenza della pertubazione elettrica.

(20) Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale nello stato fondamentale, sui cui agisce, a partire dal tempo $t = -\infty$ la perturbazione

$$V(t) = -Exe^{-\frac{t^2}{\tau^2}},$$

dove E e τ sono costanti reali positive, corrispondente ad un campo elettrico costante, gaussianamente smorzato. Si determini la probabilità che al tempo $t = \infty$ si trovi nello stato $|n\rangle$ al primo ordine nella teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo.

(21) Si considerino due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ in una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza L. Si supponga che le particelle interagiscano attraverso il potenziale $V = k\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$, dove $\vec{s}_i$ sono gli spin delle due particelle. Si determini lo spettro di energia del sistema.

(22) Si consideri una coppia di particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$, i cui stati sono descritti dallo spin totale S e dal momento angolare relativo L. Quali sono i valori permessi di L ed S? Sapendo che il deuterio ha un unico stato legato con $L = 0$ ed $S = 1$, si discuta se esista uno stato legato di due neutroni.