PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

FISICA MODERNA
anno accademico 2009-2010

(1) Sia dato un sistema che può trovarsi in uno di tre stati esclusivi $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, e si supponga che esso si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle. \tag{1}$$

(a) Qual è la probabilità che una misura del sistema riveli che esso si trova in ciascuno dei suoi tre stati possibili?
(b) Supponiamo che una misura del sistema possa solo rivelare se esso si trova o no nello stato $|2\rangle$. Qual è la probabilità che tale misura riveli che il sistema *non* si trova nello stato $|2\rangle$?
(c) Supponamo di effettuare dapprima questa misura (che ci dice se il sistema si trova o meno nello stato $|2\rangle$). Se questa misura dà risultato positivo (cioè il sistema si trova nello stato $|2\rangle$), effettuiamo una successiva misura per verificare se il sistema si trovi nello stato

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle - |3\rangle\right). \tag{2}$$

Qual è il risultato di questa misura?
(d) Che cosa succede se invertiamo l'ordine delle misure al punto precedente, cioè misuriamo prima se il sistema si trovi nello stato $|\varphi\rangle$ Eq. (2), e poi se esso si trovi o meno nello stato $|2\rangle$?

(2) Dati gli stati $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + i|-\rangle\right)$, $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - i|-\rangle\right)$, determinare esplicitamente l'operatore

$$O = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \tag{3}$$

calcolandone gli elementi di matrice nella base degli stati $|\pm\rangle$. Giustificare il risultato.

(3) Dati due operatori hermitiani A, B, si determini l'aggiunto del loro prodotto $C = AB$. Si determini inoltre quale condizione devono soddisfare A e B affinché: (a) $C = C^\dagger$ oppure (b) $C = -C^\dagger$.

(4) Dimostrare che se la condizione necessaria sufficiente affinché l'operatore

$$U \equiv e^{iH} \tag{4}$$

sia unitario è che l operatore H sia hermitiano.

(5) Per un sistema a tre livelli $|i\rangle$, $i = 1,\ 2,\ 3$, si considerino gli operatori aventi elementi di matrice

$$\langle i|A|j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \langle i|B|j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \langle i|C|j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Discutere quali di questi operatori siano a due a due compatibili e quali incompatibili. Per quelli compatibili determinare una base comune di autostati ed i relativi autovalori, e per quelli incompatibili, determinare l'indeterminazione minima delle misure dell'uno in termini di quella dell'altro.

(6) Determinare la matrice densità nella base degli stati $|\pm\rangle$ per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle = N\left[(1+\sqrt{2})i|+\rangle + |-\rangle\right]$, dove N è una costante di normalizzazione opportuna, e determinare la sua traccia ed il suo determinante. Per un sistema il cui stato è descritto da questa matrice densità, determinare la probabilità dei risultati delle misure degli operatori $B \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $C \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, e scrivere la matrice densità del sistema dopo la misura di ciascuno di essi.

(7) Determinare la matrice densità dell'esercizio precedente nella base delle matrici di Pauli. Determinare inoltre la matrice densità per un sistema che ha il 50% di probabilità di trovarsi nello stato $|\psi\rangle$ del problema precedente, ed il 50% di probabilità di trovarsi nello stato $|\varphi\rangle = N\left[(1-\sqrt{2})i|+\rangle + |-\rangle\right]$. Qual è il significato fisico di questa matrice densità?

(8) Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione tale per cui, nei punti $x = x_i$, $f(x_i) = 0$ ma $f'(x_i) \neq 0$, allora

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}}. \tag{6}$$

(9) Considerare l'operatore $\mathcal{P}$ tale che, se $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$, allora

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x). \tag{7}$$

Determinare gli elementi di matrice di questo operatore nella base delle coordinate ed utilizzare il risultato per determinare i suoi autovalori e le sue autofunzioni. Discutere se l'operatore dato sia unitario e/o hermitiano.

(10) Determinare gli elementi di matrice dell'operatore di traslazione T (sia nel caso infinitesimo che nel caso finito) nella base degli autostati dell'impulso. Determinare la sua azione sull'operatore posizione $\hat{q}$ utilizzando la rappresentazione degli impulsi.

(11) Determinare gli elementi di matrice del commutatore $[\hat{p}, \mathcal{P}]$:

$$\langle k|[\hat{p}, \mathcal{P}]|\psi\rangle; \quad \langle q|[\hat{p}, \mathcal{P}]|\psi\rangle, \tag{8}$$

dove $\hat{p}$ è l'operatore impulso, $\mathcal{P}$ l'operatore definito nel problema 9, $|k\rangle$ e $|q\rangle$ sono rispettivamente autostati dell'impulso e della posizione, e $|\psi\rangle$ è uno stato generico.

(12) Dimostrare che se gli autostati degli operatori A e B sono costanti del moto, allora anche gli autostati di $C = [A, B]$ sono costanti del moto.

(13) Determinare l'operatore di evoluzione temporale per un sistema a due livelli la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$(a)\ H = B\sigma_z; \qquad \text{oppure} \quad (b)\ H = Bt\sigma_z, \tag{9}$$

dove B è una costante. Se il sistema al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle + |-\rangle\right), \tag{10}$$

determinare la probabilità che al tempo $t = T$ esso si trovi nello stato

$$|2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle - |-\rangle\right). \tag{11}$$

(14) Per un sistema la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + ax, \tag{12}$$

si determinino (in rappresentazione di Heisenberg) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx^2}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dp^2}{dt}$.

(15) Si supponga di eseguire una misura di posizione al tempo $t = t_0 > 0$, per un sistema la cui evoluzione temporale è governata dall'hamiltoniana Eq. (12). Determinare l'indeterminazione dellla misura nel caso in cui (a) al tempo $t = 0$ sia stata eseguita una misura di posizione; (b) al tempo $t = 0$ la posizione del sistema sia nota con indeterminazione Δ^2.

(16) Determinare l'indeterminazione di posizione al tempo t per una particella libera che al tempo $t = 0$ è nello stato

$$\psi(x) = N \exp -\frac{x^2}{\beta - i\gamma}. \tag{13}$$

(17) Dimostrare che per un pacchetto d'onde

$$\psi(x,t) = \int dk e^{i(kx - \omega(k)t)} \bar{\psi}(k) \tag{14}$$

la velocità di gruppo $v_g \equiv \langle \frac{dx}{dt} \rangle$ è data da $v_g = \langle \frac{d\omega}{dk} \rangle$.
Suggerimento: usare la rappresentazione degli impulsi.

(18) Si consideri una particella vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza L. Si supponga che al tempo $t = 0$ lo stato della particella sia una sovrapposizione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato. Si determinino (a) lo stato della particella al tempo $t = 0$ supponendo che $\langle p \rangle = \frac{4}{3}\frac{\hbar}{L}$; (b) il tempo $t = t_0$ tale che $\langle p \rangle = 0$.

(19) Considerare una buca di potenziale infinitamente stretta ed infintamente profonda, cioè tale che

$$V(x) = -\kappa\delta(x). \tag{15}$$

Dimostrare che l'unica autofunzione di energia negativa (stato legato) deve essere pari, e determinare l'autovalore di energia associato.
Suggerimento: ricordare che $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$ e determinare dapprima la soluzione quando $x \neq 0$, e poi usare il risultato per determinare la soluzione anche quando $x = 0$.

(20) Si consideri un sistema unidimensionale soggetto ad un potenziale a gradino di altezza V_0. Si dimostri che data una soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria corrispondente a particelle che provengono da $x < 0$ è possibile costruire un'altra soluzione linearmente indipendente da essa associata allo stesso autovalore di energia.
Suggerimento: sfruttare il fatto che l'equazione di Schrödinger è reale (cioè tutti i coefficienti che compaiono sono reali).
Costruire una soluzione corrispondente a particelle che provengono da $x > 0$ come combinazione lineare delle due soluzioni trovate.

(21) Dimostrare che per qualunque sistema unidimensionale l'operatore parità $\mathcal{P}$ si può rappresentare in termini degli operatorei posizione ed impulso come

$$\mathcal{P} = e^{i\pi N}, \tag{16}$$

dove N è l'operatore numero $N = a^\dagger a$, con $a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(x + ip)$.

(22) Dimostrare che qualunque osservabile $F(\hat{x}, \hat{p})$ che commuta con l'hamiltoniana $H(\hat{x}, \hat{p})$ dell'oscillatore armonico dipende da $\hat{x}$ e $\hat{p}$ solo attraverso H:

$$F(\hat{x}, \hat{p}) = F\left[H(\hat{x}, \hat{p})\right]. \tag{17}$$

(23) Calcolare il valor medio di x al tempo t per un sistema soggetto ad un potenziale armonico che al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$e^{-i\frac{pz}{\hbar}}|0\rangle, \tag{18}$$

dove p è l'operatore impulso, z è una costante qualunque, e $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell oscillatore armonico.
Suggerimenti: (a) usare la rappresentazione di Heisenberg; (b) ricordare la relazione tra p ed il generatore delle traslazioni.