PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

MECCANICA QUANTISTICA
anno accademico 2010-2011

(1) Si scrivano le autofunzioni dell'hamiltoniana di particella libera in tre dimensioni nella rappresentazione delle coordiante. Si dimostri che se al tempo $t = 0$ una particella libera si trova in uno stato isotropo, cioè tale che $\langle \vec{x}|\psi\rangle$ non dipende dalla direzione del vettore $\vec{x}$ allora le probabilità di una misura di impulso per il sistema dato è isotropa a qualunque tempo t.

(2) Si esprima la funzione d'onda $\psi(\vec{x}+\vec{a}) = \langle \vec{x}+\vec{a}|\psi\rangle$ in termini dell'azione dell'operatore di traslazione n-dimensionale sulla funzione d'onda $\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\psi\rangle$:

$$\langle \vec{x} + \vec{a}|\psi\rangle = \langle \vec{x}|\mathcal{T}_{\vec{a}}|\psi\rangle.$$

Si determini la forma esplicita dell'operatore $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ nella base delle coordinate.
Suggerimento: si consideri inizialmente il caso di traslazione infinitesima, in cui cioè $\vec{a} = \epsilon\vec{n}$, dove $\vec{n}$ è normalizzato a uno, $\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$, ed $\epsilon \ll 1$.

(3) Si esprima la delta di Dirac tridimensionale $\delta^{(3)}(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ in coordinate sferiche, definite come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

.

(4) Si separi l'operatore cinetico in d dimensioni in parte radiale e parte angolare.
Suggerimento: si sfrutti il fatto che il laplaciano in d dimensioni è dato da $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2}$ (dove L^2 è un operatore che agisce solo sulle variabili angolari).

(5) Determinare la legge di evoluzione temporale (alla Heisenberg) per l'operatore momento angolare $\vec{L}$, in presenza di una hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$. Confrontare il risultato con il risultato classico.

(6) Determinare l'indeterminazione $\Delta^2 L_x$ e $\Delta^2 L_y$ delle componenti del momento angolare lungo gli assi x e y in un autostato $|\ell m\rangle$ di L^2 ed L_z. Confrontare il risultato con il risultato del principio di indeterminazione.

(7) Determinare le matrici di L_x, L_y ed L_z *nella base degli autostati di* L_z, ossia gli elementi di matrice $\langle 1, m|L_i|1, m'\rangle$. Determinare la trasformazione unitaria che realizza il cambiamento da questa base a quella (discussa a lezione) in cui gli elementi di matrice di L_i valgono $\langle j|L_i|k\rangle = -i\hbar\epsilon^{ijk}$.

(8) Considerare l'elemento di matrice dell'operatore di spin $\vec{s}$ in uno stato $|\psi\rangle$ per una particella di spin $\frac{1}{2}$:

$$\vec{s}_\psi \equiv \langle \psi|\vec{s}|\psi\rangle.$$

Dimostrare che se si agisce su $|\psi\rangle$ con una rotazione R attorno ad un asse qualunqe $|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = R|\psi\rangle$ l'elemento di matrice $\vec{s}_{\psi'}$ si ottiene da $\vec{s}_\psi$ eseguendo una rotazione dello stesso angolo attorno allo stesso asse.

(9) Determinare il valor medio dello spin totale per un sistema di due particelle di spin 1/2 che si trovano nello stato in cui le terze componenti dello spin delle due particelle sono dirette in verso opposto (ad esempio $s_z^1 = 1/2$, $s_z^2 = -1/2$).

(10) Si supponga che la hamiltoniana per una particella di spin generico s soggetta ad un potenziale centrale abbia la forma

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + k\vec{L} \cdot \vec{S},$$

dove $\vec{L}$ e $\vec{S}$ sono rispettivamente gli operatori momento angolare e spin per la particella data,m e k è una costante reale. Si separi il moto radiale e, supponendo noto lo spettro di autofunzioni ed autovalori dell'hamiltoniana radiale, si scrivano autofunzioni ed autovalori dell'hamiltoniana complessiva del problema.

(11) Determinare lo stato fondamentale (a meno della normalizzazione) e la forma generica degli stati eccitati per le autofunzioni dell'oscillatore armonico isotropo in coordinate sferiche.

(12) Dimostrare che per un oscillatore armonico tridimensionale in un autostato di energia i valori medi di energia cinetica e potenziale sono uguali $\langle T\rangle = \langle V\rangle$, confrontando la dipendenza dai parametri m ed ω dell'autovalore di energia e dell'hamiltoniana. Utilizzare il risultato per calcolare il prodotto dell'indeterminazione di $|\vec{x}|^2$ and $|\vec{p}|^2$ in un autostato di energia e confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.

(13) Per un sistema tridimensionale soggetto al potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r^p}$$

(con κ costante reale positiva) determinare la dipendenza degli autovalori di energia da κ e dalla massa m.

Dato uno stato avente funzione d'onda $\psi(r)$, si consideri l'insieme di stati (correttamente normalizzati) $\psi(\lambda r)$. Discutere come variano il valor medio dell'energia cinetica $\langle T\rangle$ e dell'energia potenziale $\langle V\rangle$ in tale famiglia di stati al variare di λ. Che cosa succede se $p > 2$?

(14) Dimostrare che per una Hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q})$ in uno stato stazionario, in cui $\langle[A, H]\rangle = 0$ per ogni operatore A, se si considera il caso $A = \vec{q} \cdot \vec{p}$ se ne deduce che

$$2\langle T\rangle = \langle \vec{q} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{q})\rangle.$$

Si confronti il risultato con quelli dei problemi (12) e (13)

(15) Per un atomo di idrogeno nello stato fondamentale, determinare a quale distanza dal nucleo la probabilità di posizione è massima. Confrontare il risultato con il valor medio per la probabilità di posizione.

(16) Si determini la azione classica in termini delle condizioni iniziali e finali per una particella libera unidimensionale. Si determini inoltre l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione temporale (propagatore)

$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t' | e^{\frac{1}{i\hbar} H(t'-t)} | q', t' \rangle$$

e si mostri che esso, a meno della normalizzazione, coincide con l'esponenziale di $i/\hbar$ volte l'azione classica.

(17) Dimostrare le seguenti proprietà del propagatore $K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = \langle \vec{x}' | S(t', t) | \vec{x} \rangle$:

(a)

$$K^*(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$$

(b) se il sistema è invariante per traslazioni allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}' - \vec{x}; t', t)$$

(c) se il sistema è invariante per traslazioni temporali e le autofunzioni della hamiltoniana sono reali allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t'; \vec{x}', t)$$

(d) se il sistema è invariante per parità allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(-\vec{x}', t'; -\vec{x}, t)$$

(18) *(facoltativo)* Calcolare la azione classica $S(x, x'; t)$ per un oscillatore armonico, con le condizioni al contorno $x(0) = x$, $x(t) = x'$. Dimostrare che il propagatore

$$K(x', t; x, 0) = f(t) \exp\left[\frac{i}{h} S(x, x'; t)\right]$$

soddisfa l'equazione di Schrödinger per un'opportuna scelta della funzione $f(t)$, e determinare questa funzione.

(19) Una particella in un cristallo unidimensionale è libera nella regione $-a < x < a$ ma è soggetta ad una forza armonica di richiamo al di fuori di questa regione. Il potenziale ha pertanto la forma

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 (x-a)^2 & x > a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{1}{2} m\omega^2 (x+a)^2 & x < -a \end{cases} .$$

Si determini lo spettro di energia della particella nell'approssimazione WKB. Si discutano i limiti di piccolo e grande a.

(20) La carica del nucleo di un atomo idrogenoide aumenta di una unità in seguito ad un decadimento β. Determinare la variazione di energia dell'elettrone nell'n-esimo stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni (sfruttando il risultato del problema (14)). Confrontare con il risultato esatto.

(21) Si consideri un oscillatore armonico bidimensionale con potenziale

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + \lambda xy.$$

Si supponga che $\lambda \ll k_i$ e si tratti l'ultimo termine come una perturbazione. Si determini la correzione ai primi due livelli eccitati al primo ordine in λ supponendo che $|k_1 - k_2| < 2\lambda$.

(22) Si consideri una particella di carica q e massa m nello stato fondamentale di un oscillatore armonico isotropo, soggetta a partire dal tempo $t > 0$ ad un campo elettrico diretto lungo l'asse z, avente potenziale $V(t) = -q\mathcal{E}z\cos(\bar{\omega}t)e^{-t/\tau}$. Si determini la probabilità di una transizione ad un livello eccitato al tempo t.

(23) Si consideri una coppia di elettroni (il cui spin è pari ad $\frac{1}{2}$) che si trovano in uno stato di spin totale $s = 1$, vincolati a muoversi in una dimensione, ed interagenti attraverso il potenziale attrattivo

$$V(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & |x_1 - x_2| > a \\ -V_0 & |x_1 - x_2| \le a \end{cases}.$$

Si determini lo stato fondamentale nel caso in cui l'impulso totale del sistema è uguale a zero.

(24) Si consideri un sistema di N particelle identiche non interagenti, con dinamica descritta da una hamiltoniana completamente separabile in termini di hamiltoniane H_i di particella singola di spettro noto, nondegenere, ed uguale per tutte:

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i, \qquad H_i|n\rangle = E_n|n\rangle.$$

Si determini l'energia dello stato fondamentale del sistema in termini delle E_n nel caso in cui le particelle sono bosono o fermioni. Si scriva inoltre esplicitamente la funzione d'onda per lo stato fondamentale in entrambi i casi supponendo $N = 3$.

(25) Si determini il valor medio dello spin lungo i tre assi cartesiani per un gas di elettroni in cui una frazione p ha spin $+\frac{1}{2}$ lungo l'asse x mentre i restanti non sono polarizzati.