PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

FISICA MODERNA
anno accademico 2011-2012

Si consideri un sistema che può trovarsi in uno di tre stati esclusivi $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, e si supponga che esso si trovi nello stato

(1)

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|2\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|3\rangle. \tag{1}$$

Si determini la probabilità che il sistema *non* si trovi nello stato $|1\rangle$.

(2) Si consideri un sistema che può trovarsi in tre stati esclusivi $|A\rangle$, $|B\rangle$, $|C\rangle$. Si supponga che il sistema si trovi inizialmente nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle\right). \tag{2}$$

Il sistema viene lasciato evolvere, passando attraverso un sistema di tre fenditure: la prima fenditura seleziona lo stato $|A\rangle$, la seconda lo stato $|B\rangle$, e la terza lo stato $|C\rangle$. Vi è un rivelatore che dice da che fenditura è passato il sistema, che può essere attivato o disattivato. Viene quindi eseguita una misura sul sistema, in seguito alla quale si trova che il sistema è nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle\right). \tag{3}$$

Ci si chiede qual è la probabilità che al momento del passaggio attraverso il sistema di fenditure il sistema si trovasse in uno stato $|\xi\rangle$ dove

(a) $|\xi\rangle = |A\rangle$;
(b) $|\xi\rangle \neq |A\rangle$;
(c) $|\xi\rangle = |B\rangle$;
(d) $|\xi\rangle \neq |B\rangle$.

Rispondere alla domanda sia quando c'è il rivelatore, sia quando non cè.

Suggerimento: Il caso in cui il rivelatore non c'è è più difficile, e può essere affrontato nel modo seguente: (i) si osserva che se il sistema era nello stato $|\xi\rangle$ al momento del passaggio dello schermo, allora i prodotti scalari $\langle\xi|\phi\rangle$ e $\langle\xi|\psi\rangle$ devono essere entrambi nonnulli (infatti se il primo fosse nullo, il sistema non potrebbe mai essere in tale stato, e se il secondo fosse nullo, la misura non potrebbe mai dare il risultato richiesto); (ii) ci si chiede (caso delle domande a-b) qual è il più generale stato $|\xi\rangle$ per un sistema che *non* è nello stato $|A\rangle$ (e analogamente nel caso delle domande c-d nello stato $|B\rangle$).

(3) Si determini che condizione devono soddisfare i coefficienti a, b, c affinché lo stato

$$|\chi\rangle = a|A\rangle + b|B\rangle + c|C\rangle \tag{4}$$

formi una base assieme agli stati $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ Eq. (2-3) del problema precedente.

(4) Si determini l'aggiunto $C^\dagger$ del prodotto di due operatori $C = AB$ in termini di $A^\dagger$ e $B^\dagger$.

(5) Si dimostri che qualunque operatore può essere scritto come somma di un operatore hermitiano e di un operatore antihermitiano.

(6) Si dimostri che (a) condizione necessaria e sufficiente affinché l'operatore $U = 1 + \epsilon i H$ sia unitario al primo ordine in ϵ è che H sia hermitiano; (b) condizione sufficiente affinchè l'operatore $U = e^{iH}$ sia unitario è che H sia hermitiano.

(7) Sia dato un sistema che si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1+i}{2}|-\rangle. \tag{5}$$

Determinare una osservabile A, nella base $|\pm\rangle$, la cui indeterminazione in questo stato sia nulla.

(8) Per un sistema a due livelli, si considerino gli stati

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + i|-\rangle\right) \tag{6}$$

$$|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|+\rangle + |-\rangle\right) \tag{7}$$

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \tag{8}$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right) \tag{9}$$

e gli operatori

$$A = |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b| \tag{10}$$

$$B = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|. \tag{11}$$

Si calcolino l'indeterminazione di entrambi gli operatori nello stato $|a\rangle$, nello stato $|1\rangle$ e nello stato $|+\rangle$, ed in ciascuno dei tre casi si confronti il risultato con il vincolo posto dal principio di indeterminazione.

(9) Determinare la matrice densità per un sistema che si trova con probabilità $\frac{1}{2}$ in ciascuno dei due stati $|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + i\sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$, $|\phi_2\rangle = i\sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$, e dimostrare che essa coincide con la matrice densità per un sistema che si trova con probabilità $\frac{3}{4}$

nello stato $|+\rangle$ e con probabilità $\frac{1}{4}$ nello stato $|-\rangle$.

(b) Dimostrare che la matrice densità $\rho = \sum_i p_i |e_i\rangle\langle e_i|$ è invariante sotto un cambiamento di base realizzato da una matrice unitaria $U = \sum_j |e_j\rangle\langle e'_j|$.

(10) Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione tale per cui, nei punti $x = x_i$, $f(x_i) = 0$ ma $f'(x_i) \neq 0$, allora

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}}. \tag{12}$$

(11) Determinare autovalori ed autofunzioni dell'operatore $\mathcal{P}$ tale che

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle. \tag{13}$$

Discutere se questo operatore sia unitario e/o hermitiano.

(12) Determinare mediante il teorema di Noether la quantità (detta viriale) che è classicamente conservata quando vi è invarianza per dilatazioni, ovvero sotto la trasformazione $q \to q' = \lambda q$. Determinare quindi l'operatore che genera le dilatazioni sugli stati quantistici.

(13) Si consideri la trasformazione realizzata dall'operatore unitario

$$U = e^{\frac{i\alpha(qp+pq)}{2\hbar}}. \tag{14}$$

Si determinino le trasformazioni degli operatori coordinata $\hat{q}$ ed impulso $\hat{p}$ sotto l'azione aggiunta di tale operatore, ossia $\hat{q}' = U\hat{q}U^\dagger$ e $\hat{p}' = U\hat{p}U^\dagger$. Si utilizzi il risultato per determinare l'azione della trasformazione sugli stati fisici, sia nella base delle posizioni che degli impulsi, cioè si calcolino

$$\langle q|\psi'\rangle = \langle q|U|\psi\rangle, \tag{15}$$

$$\langle k|\psi'\rangle = \langle k|U|\psi\rangle. \tag{16}$$

(14) Dimostrare che

$$[\mathcal{P}, |\hat{p}|] = 0, \tag{17}$$

dove l'operatore $\mathcal{P}$ è stato definito nel problema n. (11), e l'operatore $|\hat{p}|$ è definito come

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar|k||k\rangle\langle k| \tag{18}$$

in termini degli autostati $|k\rangle$ dell'operatore impulso, che soddisfano a

$$\hat{p}|k\rangle = \hbar k|k\rangle. \tag{19}$$

Determinare le autofunzioni comuni agli operatori $\mathcal{P}$ e $|\hat{p}|$.

(15) Dimostrare che se gli autostati degli operatori A e B sono costanti del moto, allora anche gli autostati di $C = [A, B]$ sono costanti del moto.

(16) Si consideri un sistama a due livelli, la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right). \tag{19}$$

Si definisca l'operatore hermitiano

$$A = \left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right). \tag{20}$$

Supponendo che il sistema al tempo $t = 0$ si trovi nell'autostato di A associato all'autovalore 1, determinare: (a) la probabilità che al tempo t esso si trovi nell' autostato di A associato all'autovalore -1; (b) il valor medio di A al tempo t; (c) l' indeterminazione di A al tempo t.

(17) Si consideri un sistema a due livelli, la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = E_0\left(|+\rangle\langle+| + \sqrt{2}|+\rangle\langle-| + \sqrt{2}|-\rangle\langle+|\right). \tag{21}$$

Se il sistema si trova inizialmente nello stato $|+\rangle$, con che probabilità si troverà nello stato $|-\rangle$ al tempo t? Determinare il periodo delle oscillazioni tra i due stati.

(18) Sia consideri un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x. \tag{22}$$

Si determini la dipendenza dal tempo degli operatori $x(t)$ e $p(t)$ in rappresentazione di Heisenberg. Si supponga quindi che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato in cui la posizione ha una certa indeterminazione $\Delta^2 x$. Utilizzando il principio di indeterminazione la legge del moto appena trpvata, si determini l'indeterminazione minima di una misura di posizione al tempo t.

(19) Si determinino le autofunzioni $|\psi_E >$ dell'hamiltoniana H Eq. (22) nella base degli impulsi, ossia $\langle p|\psi_E\rangle$.
Si sfrutti il risultato per determinare l'evoluzione temporale di uno stato nella base degli impulsi: supponendo che un sistema al tempo $t = 0$ si trovi in uno stato avente funzione d'onda

$$\langle p|\psi(t)\rangle\Big|_{t=0} = \psi(p, 0) \tag{23}$$

se ne determini la funzione d'onda al tempo t (in rappresentazione di Schrödinger), cioè si determini

$$\psi(p, t) \equiv \langle p|\psi(t)\rangle. \tag{24}$$

(20) Considerare una particella libera e suppore che si possa eseguire una misura di posizione su di essa al tempo $t = 0$, dopo la quale la particella si trova in un autostato di posizione $x = x_0$. Determinare la funzione d'onda

$$K(x, x_0; t) \equiv \psi(x; t) \tag{25}$$

di questa particella ad un tempo qualunque t. La quantità $K(x, x_0; t)$ Eq. (25) è detta propagatore di Feynman.
Suggerimento: per calcolare l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp i \left(\lambda x^2 + \beta x\right)$, con λ reale positivo, sostituire λ con $\lambda' = \lambda + i\epsilon$ e porre $\epsilon = 0$ al termine del calcolo.
Utilizzando una risoluzione dell'identità, dimostrare che se il sistema al tempo $t = 0$ ha funzione d'onda $\psi_0(x)$, allora al tempo t esso ha sempre funzione d'onda

$$\psi(x, t) = \int dx' K(x, x'; t)\psi_0(x). \tag{26}$$

Supporre che al tempo $t = 0$ is sistema si trovi in un autostato dell'impulso, ed utilizzare la Eq. (26) per calcolarne lo stato al t, verificando che si riproduce il risultato noto.

(21) Dimostrare che per un pacchetto d'onde

$$\psi(x, t) = \int dk e^{i(kx - \omega(k)t)} \bar{\psi}(k) \tag{27}$$

la velocità di gruppo $v_g \equiv \frac{d}{dt}\langle x \rangle$ è data da $v_g = \langle \frac{d\omega}{dk} \rangle$.

(22) Calcolare l'indeterminazione di posizione al tempo t per una particella libera che al tempo $t = 0$ è nello stato

$$\psi(x) = N \exp - \frac{x^2}{\beta - i\gamma}. \tag{28}$$

(23) Calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso $\Delta^2 x$ e $\Delta^2 p$ nell n-esimo autostato di energia di una buca di potenziale infinitamente profonda. Confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.

(24) Si consideri la hamiltoinana unidimensionale avente potenziale

$$H = \frac{p^2}{2m} + V\Theta(x) - \frac{\hbar^2 g}{2m}\delta(x), \tag{29}$$

dove $\Theta(x)$ e $\delta(x)$ sono rispettivamente la funzione a gradino e la delta di Dirac. Se ne determinino le autofunzioni quando $E > V$. Si calcolino i coefficienti di trasmissione e riflessione per un'onda incidente sulla barriera da sinistra.

(25) Considerare una buca di potenziale asimmetrica, cioè tale che

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } x < -a \\ 0 & \text{se } |x| < a \\ V_1 & \text{se } x > a \end{cases}, \tag{30}$$

con $V_0 < V_1$ Determinare sotto quali condizioni lo spettro dei energia contiene almeno uno stato legato.
Suggerimento: imporre la continuità di ψ'/ψ nei punti di raccordo, quindi scrivere la soluzione nella regione $|x| < a$ nella forma $\psi(x) = A\sin(kx + \delta)$.

(26) Considerare le autofunzioni con $E > V_0$ per una hamiltoniana di tipo barriera di potenziale, cioè

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > a \\ V_0 & \text{se } |x| < a \end{cases}. \tag{31}$$

Calcolare il coefficiente di trasmissione nella regione $x > a$ di un'onda incidente dalla regione $x < -a$ e dimostrare che esistono valori di energia per i quali $T = 1$, ossia vi è trasmissione completa (effetto Ramsauer-Townsend).

(27) Determinare la parità delle autofunzioni $|n\rangle$ dell'operatore numero $N = a^\dagger a$ (senza usarne la forma esplicita). Utilizzare il risultato per dimostrare che l'operatore $P = e^{i\pi N}$ fornisce una rappresentazione esplicita dell'operatore parità.

(28) Si consideri un sistema soggetto ad un potenziale armonico, ossia con hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{32}$$

che al tempo $t = 0$ si trova nello stato fondamentale. A partire dal tempo $t + \varepsilon$, sul sistema agisce anche una forza elettrostatica costante, e l'hamiltoniana diventa

$$H = H_0 - Ex. \tag{33}$$

Si determinino lo spettro dell'hamiltoniana Eq. (34), ed i valore medi di posizione ed impulso a tutti i tempi successivi.