

PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

MECCANICA QUANTISTICA

anno accademico 2012-2013

- (1) Per un sistema n -dimensionale si scrivano: (a) gli elementi di matrice dell'operatore posizione \vec{x} e dell'operatore impulso \vec{p} tra autostati della posizione $|\vec{x}\rangle$; (b) le autofunzioni dell'operatore impulso nella base degli autostati della posizione $\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle$; (c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.
- (2) Si consideri un sistema di due particelle di uguale massa m in una dimensione soggette al potenziale

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}m\omega^2 (3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2),$$

dove x_1 e x_2 sono le coordinate delle due particelle. Si determinino lo spettro di energia del sistema e la sua degenerazione.

- (3) In uno spazio d -dimensionale, determinare il generatore delle traslazioni lungo una direzione \hat{n} , dove \hat{n} è un qualunque versore (vettore di norma uno) nello spazio dato, ed esprimere il risultato in termini dell'operatore impulso d -dimensionale \hat{p} . Scrivere quindi l'operatore che realizza una traslazione finita di lunghezza k lungo \hat{n} , prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base delle coordinate.
- (4) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$.
- (5) Esprimere la delta di Dirac d -dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x^1 - x_0^1)\delta(x^2 - x_0^2) \dots \delta(x^d - x_0^d)$ in coordinate ipersferiche, definite come

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ \dots \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \dots \sin \phi_{d-1} \end{pmatrix}.$$

- (6) Per un sistema di due corpi, con funzione d'onda $\langle\vec{x}_1\vec{x}_2|\psi\rangle = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, considerare l'operatore di parità \mathcal{P} e l'operatore di scambio \mathcal{S} , definiti rispettivamente da $\langle\vec{x}_1\vec{x}_2|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-\vec{x}_1, -\vec{x}_2)$ e $\langle\vec{x}_1\vec{x}_2|\mathcal{S}|\psi\rangle = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. Determinare l'azione degli operatori \mathcal{P} ed \mathcal{S} esprimendo \vec{x}_1 e \vec{x}_2 in coordinate del baricentro e relativa, e scrivendo queste ultime in coordinate sferiche.

(7) Dimostrare che l'operatore impulso radiale p_r è hermitiano verificando che

$$(\langle \psi | p_r | \phi \rangle)^* = \langle \phi | p_r | \psi \rangle$$

attraverso il calcolo esplicito dell'elemento di matrice nella base delle coordinate ed in coordinate sferiche.

- (8) Determinare i commutatori $[\hat{L}^i, \hat{x}^j]$ e $[\hat{L}^i, \hat{p}^j]$, ed interpretare il risultato.
- (9) Dimostrare esplicitamente, usando la rappresentazione delle coordinate, che uno stato $|\phi\rangle$ tale che $\langle \vec{x} | \phi \rangle = \phi(r)$ (dove r è la coordinata radiale) è un autostato di tutte le componenti dell'operatore momento angolare \hat{L}^i .
- (10) Dimostrare, utilizzando i commutatori calcolati nell'esercizio 8, che lo stato $\hat{x}^i |\phi\rangle$ è autostato di \hat{L}^i , e che qualunque combinazione lineare di stati $\hat{x}^i |\phi\rangle$ è autostato di \hat{L}^2 , dove $|\phi\rangle$ è lo stato dell'esercizio 9.
- (11) Determinare i valori delle indeterminazioni $(\Delta L_x)^2$ e $(\Delta L_y)^2$ in un autostato di L^2 ed L_z . Determinare inoltre gli stati "di minima indeterminazione" che minimizzano il valore del prodotto $\Delta L_x \Delta L_y$.
- (12) Si consideri l'operatore momento angolare lungo un asse qualsiasi \vec{n} , $L_n \equiv \vec{n} \cdot \vec{L}$, con $|\vec{n}| = 1$. Si dimostri che su un qualunque stato $|lm\rangle$ tale per cui $l = 1$ (momento angolare pari ad uno)

$$(L_n^3 - \hbar^2 L_n) |lm\rangle = 0$$

(identità di Hamilton-Cayley).

Si dimostri inoltre, usando le regole di commutazione, che se ψ è un autostato di L_n allora il valor medio delle componenti di \vec{L} nel piano ortogonale ad \vec{n} è nullo.

Si determini infine il valor medio di tutte le componenti di \vec{L} nello stato $|\phi\rangle$ normalizzato, $\langle \phi | \phi \rangle = 1$, e tale che $\langle \vec{x} | \phi \rangle = (ax_1 + bx_2 + cx_3)f(r)$, con a, b, c costanti reali ed r la coordinata radiale.

- (13) Si consideri un sistema di spin uno, e si supponga che la sua evoluzione temporale sia data dall'hamiltoniana

$$H = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

dove \vec{B} è un vettore fisso esterno a componenti reali, e \vec{S} è l'operatore spin. Si determini e risolva la legge del moto per gli stati fisici in rappresentazione di Schrödinger. Si utilizzi la soluzione per determinare la probabilità che una misura di momento angolare eseguita al tempo T su di una particella che si trova nello stato di $m = +1$ al tempo $t = 0$ dia come risultato $m = -1$. Si ripeta tutta la trattazione utilizzando la rappresentazione di Heisenberg per l'evoluzione temporale.

- (14) Determinare le matrici di L_x, L_y ed L_z per un sistema di spin uno *nella base degli autostati di L_z* , ossia gli elementi di matrice $\langle 1, m | L_i | 1, m' \rangle$. Determinare la trasformazione

unitaria che realizza il cambiamento da questa base a quella (discussa a lezione) in cui gli elementi di matrice di L_i valgono $\langle j|L_i|k\rangle = -i\hbar\epsilon^{ijk}$.

- (15) Si consideri un sistema la cui dinamica è data dalla stessa Hamiltoniana di quella del problema (13), ma nel caso di spin $\frac{1}{2}$. Si determini la dipendenza dal tempo del valor medio di ciascuna delle componenti dello spin in uno stato qualunque $|\psi\rangle$, $\langle\psi|\vec{s}|\psi\rangle$, sia alla Schrödinger che alla Heisenberg, e si determini in particolare la probabilità che un sistema che al tempo $t = 0$ sia preparato nello stato $|+\rangle$ al tempo t sia rivelato stato $|-\rangle$.

- (16) Si determini la probabilità che una particella di spin $\frac{1}{2}$ avente $s_z = +\frac{1}{2}$ sia rivelata con spin pari a $\pm\frac{1}{2}$ lungo un asse \vec{n} qualunque.

- (17) Sia dato un sistema di tre particelle diverse di spin $\frac{1}{2}$, che interagiscono attraverso l'hamiltoniana

$$H = V(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1),$$

dove \vec{s}_i è l'operatore di spin per la i -esima particella. Si determinino lo spettro degli autovalori di energia per questa hamiltoniana e la loro degenerazione.

- (18) Sia dato un sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ che interagiscono attraverso la hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1 \vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2,$$

dove \vec{L} è il momento angolare relativo del sistema di due particelle. Si separi completamente il problema, e supponendo noto e non-degenere lo spettro dell'hamiltoniana radiale, si determinino lo spettro di H e la sua degenerazione.

- (19) Considerare un sistema di una particella soggetta ad un potenziale centrale $V(r)$. Determinare la Hamiltoniana e le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg in un sistema di riferimento rotante con velocità ω intorno ad un asse qualunque. Specificare un insieme di operatori commutanti con l'hamiltoniana i cui autovalori determinano completamente lo stato del sistema, e determinare la degenerazione degli autostati di energia.

- (20) Determinare lo stato fondamentale (a meno della normalizzazione) e la forma generica degli stati eccitati per le autofunzioni dell'oscillatore armonico isotropo in coordinate sferiche.

- (21) Si consideri un oscillatore armonico *bidimensionale* isotropo avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \vec{x}^2,$$

con operatori di distruzione $a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x_i + i\frac{p_i}{m\omega})$. Si definiscano gli operatori

$$j_a \equiv \sum_{i,j=1}^2 a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j,$$

dove σ_{ij}^a è la a -esima matrice di Pauli di componenti i, j . Si determinino le relazioni di commutazione degli operatori j^a fra di loro e con l'hamiltoniana. Si esprima l'operatore $j_1^2 + j_2^2 + j_3^2$ in termini dell'hamiltoniana, e si utilizzi il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana e la sua degenerazione. Si confronti con il risultato che si ottiene separando il problema in coordinate cartesiane.

- (22) Dimostrare che per un oscillatore armonico tridimensionale in un autostato di energia i valori medi di energia cinetica e potenziale sono uguali $\langle T \rangle = \langle V \rangle$, confrontando la dipendenza dai parametri m ed ω dell'autovalore di energia e dell'hamiltoniana. Utilizzare il risultato per calcolare il prodotto dell'indeterminazione di $|\vec{x}|^2$ and $|\vec{p}|^2$ in un autostato di energia e confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.
- (23) Per un sistema tridimensionale soggetto al potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r^p}$$

(con κ costante reale positiva) determinare la dipendenza degli autovalori di energia da κ e dalla massa m .

Dato uno stato avente funzione d'onda $\psi(r)$, si consideri l'insieme di stati (correttamente normalizzati) $\psi(\lambda r)$. Discutere come variano il valor medio dell'energia cinetica $\langle T \rangle$ e dell'energia potenziale $\langle V \rangle$ in tale famiglia di stati al variare di λ . Che cosa succede se $p > 2$?

- (24) Considerare una Hamiltoniana della forma $H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{q})$, e ricordare che in uno stato stazionario $\langle [A, H] \rangle = 0$ per ogni operatore A . Dimostrare che, scegliendo $A = \vec{q} \cdot \vec{p}$, se ne deduce che

$$2\langle T \rangle = \langle \vec{q} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{q}) \rangle.$$

Confrontare risultato con quelli dei problemi (22) e (23)

- (25) Si determini il valor medio di r^k nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, con k intero. Si utilizzi il risultato per determinare in questo stato il valor medio della posizione radiale, la sua varianza, ed il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.
- (26) Si determini la azione classica in termini delle coordinate e dei tempi per (a) un oscillatore armonico e (b) una particella libera, entrambi unidimensionali. Nel caso dell'oscillatore armonico, utilizzare il risultato per determinare l'equazione del moto classico, che esprime la in funzione del tempo t .
- (27) Si determini esplicitamente per una particella libera unidimensionale l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione temporale (propagatore)

$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t' | e^{\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q, t \rangle$$

scrivendo, lo stato iniziale, quello finale e l'hamiltoniana nella base degli impulsi, e si mostri che esso coincide con l'esponenziale di una quantità proporzionale all'azione classica.

(28) Si consideri un sistema unidimensionale descritto dal potenziale

$$V(x) = \begin{cases} D(x-a) & x > a \\ 0 & -a < x < a \\ -D(x+a) & x < -a \end{cases},$$

dove D è una costante reale positiva. Si scrivano le funzioni d'onda utilizzando l'approssimazione WKB fino al primo ordine in \hbar nelle regioni $x \ll b$ e $x \gg -b$, dove $b > a$ è il punto in cui l'energia è interamente potenziale, $E = V(b)$. Si determini lo spettro di valori permessi di E imponendo che nella regione centrale $x \approx 0$ queste due soluzioni coincidano.

(29) Si consideri un sistema tridimensionale soggetto ad un potenziale idrogenoide schermato

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & 0 < r < R \\ -\frac{e^2}{r} e^{-\lambda(r-R)} & r > R \end{cases}$$

Si calcoli la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale. Si discutano gli andamenti quando $\lambda \rightarrow 0$ e quando $R \rightarrow \infty$.

(30) La carica del nucleo di un atomo idrogenoide aumenta di una unità in seguito ad un decadimento β . Determinare la variazione di energia dell'elettrone nell' n -esimo stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni. Confrontare con il risultato esatto.

(31) Si consideri un atomo di idrogeno soggetto ad un campo elettrico costante diretto lungo l'asse z (effetto Stark). Si determini la correzione all'energia del primo stato eccitato $n = 2$. Si determini inoltre l'elemento di matrice dell'operatore \vec{x} (momento di dipolo) nello stato fondamentale: si dimostri che esso è nullo in assenza di perturbazione, e se ne scriva l'espressione al primo ordine in presenza della perturbazione elettrica.

(32) Si consideri un oscillatore armonico bidimensionale con potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + \lambda xy.$$

Si supponga che $\lambda \ll k_i$ e si tratti l'ultimo termine come una perturbazione. Si determini la correzione ai primi due livelli eccitati al primo ordine in λ supponendo che $|k_1 - k_2| < 2\lambda$.

(33) Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω sul quale agisce, a partire dal tempo $t = 0$, la perturbazione

$$V_I(t) = Ax^2 e^{-bt},$$

dove A e b sono costanti reali positive. Si determini al primo ordine perturbativo la probabilità che il sistema subisca una transizione dallo stato fondamentale all' n -esimo stato eccitato nel limite di tempo infinito.

- (34) Si consideri ora il caso di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo avente potenziale centrato nell'origine, sul quale agisce la perturbazione

$$V_I(t) = -Ez\Theta(t)\cos(\omega t)e^{-t/\tau},$$

dove E e τ sono costanti reali positive, ω è la pulsazione dell'oscillatore, z è la terza coordinata cartesiana, e $\Theta(t)$ è la funzione a gradino. Si calcoli al primo ordine perturbativo la probabilità che il sistema subisca una transizione dallo stato fondamentale ad un qualunque stato eccitato per tempi $t \gg \tau$.

- (35) Si consideri un sistema di N particelle identiche non interagenti, con dinamica descritta da una hamiltoniana completamente separabile in termini di hamiltoniane H_i di particella singola di spettro noto, nondegenere, ed uguale per tutte:

$$H = \sum_{i=1}^N H_i, \quad H_i|n\rangle = E_n|n\rangle.$$

Si determini l'energia dello stato fondamentale del sistema in termini delle E_n nel caso in cui le particelle sono bosoni o fermioni. Si scriva inoltre esplicitamente la funzione d'onda per lo stato fondamentale in entrambi i casi supponendo $N = 3$.

- (36) Si consideri un sistema di due fermioni identici di spin $\frac{1}{2}$ in una dimensione, con hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + B\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2,$$

dove \vec{s}_i sono gli operatori di spin delle due particelle e B ed ω sono costanti reali positive. Si determinino la funzione d'onda completa (spaziale e di spin) per lo stato fondamentale ed il primo livello eccitato del sistema, ed i corrispondenti autovalori di energia e spin, a seconda dei valori dei parametri B ed ω

- (37) Si considerino due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ e massa m che interagiscono fra di loro attraverso il potenziale

$$V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{1}{2}m\omega^2|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 + B\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

dove \vec{x}_i e \vec{s}_i sono rispettivamente gli operatori posizione e spin delle due particelle. Si determini lo spettro di energia e la sua degenerazione, supponendo che B ed ω siano costanti reali incommensurabili.