PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

FISICA MODERNA
anno accademico 2013-2014

(1) Si consideri un sistema che può trovarsi in uno di tre stati esclusivi $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, e si supponga che esso si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|2\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}|3\rangle. \tag{1}$$

(a) Qual è la probabilità che una misura del sistema riveli che esso si trova in ciascuno dei suoi tre stati possibili?
(b) Supponiamo che una misura del sistema possa solo rivelare se esso si trova o no nello stato $|1\rangle$. Qual è la probabilità che tale misura riveli che il sistema *non* si trova nello stato $|1\rangle$?
(c) Supponamo di effettuare dapprima questa misura (che ci dice se il sistema si trova o meno nello stato $|1\rangle$), e se questa misura dà risultato negativo (cioè il sistema non si trova nello stato $|1\rangle$) una successiva misura che dice se il sistema si trova nello stato $|2\rangle$ o nello stato $|3\rangle$. Qual è la probabilità di effettuare questa sequenza di misure e trovare che il sistema si trova nello stato $|3\rangle$?
Confrontare il risultato con il risultato trovato nel caso (a), in cui si determina la probabilità che il sistema si trovi in $|3\rangle$ direttamente: il risultato è uguale o diverso, e perché?

(2) Supponiamo che il sistema del problema precedente venga lasciato evolvere, passando attraverso un sistema di tre fenditure: la prima fenditura seleziona lo stato $|1\rangle$, la seconda lo stato $|2\rangle$, e la terza lo stato $|3\rangle$. Vi è un rivelatore che dice da che fenditura è passato il sistema, che può essere attivato o disattivato. Viene quindi eseguita una misura sul sistema, in seguito alla quale si trova che il sistema è nello stato

$$|\varphi\rangle = \sqrt{\frac{1}{9}}|1\rangle - \sqrt{\frac{4}{9}}|2\rangle - \sqrt{\frac{4}{9}}|3\rangle. \tag{2}$$

Qual è la probabilità che al momento del passaggio attraverso il sistema di fenditure il sistema si trovasse in uno stato $|\xi\rangle$ dove
(i) $|\xi\rangle = |2\rangle$;
(ii) $|\xi\rangle \neq |2\rangle$;
(iii) $|\xi\rangle = |3\rangle$;
(iv) $|\xi\rangle \neq |3\rangle$.

Rispondere alla domanda supponendo che il rivelatore venga attivato, e calcolando in ciascuno dei casi dati la probabilità che il risultato sia quello assegnato.
Si può rispondere alla domanda supponendo che il rivelatore *non* venga attivato? Ad esempio: chiediamoci quale sia lo stato intermedio compatible con il fatto che lo stato iniziale sia $|\psi\rangle$ e quello finale sia $|\varphi\rangle$ determinando le probabilità relative ai casi (ii) e (iv).

(3) Supponiamo ora che sempre sullo stato Eq. (1) venga effettuata una misura per rivelare se esso si possa trovare nello stato

$$|\chi\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}}|1\rangle - \sqrt{\frac{4}{5}}|3\rangle. \tag{3}$$

(a) Qual è il risultato della misura? (b) Qual è il risultato della misura se dapprima eseguiamo la misura al punto (b) del problema (1), ossia una misura che rivela se il sistema si trova o meno nello stato $|1\rangle$? Confrontare il risultato con il risultato trovato nel caso (a), in cui si determina la probabilità che il sistema si trovi in $|\chi\rangle$ direttamente: il risultato è uguale o diverso, e perché? Qual è la differenza tra questo caso, e quello considerato al punto (c) del problema 1?.

(4) Si determini che condizione devono soddisfare i coefficienti a, b, c, affinché lo stato

$$|\xi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle \tag{4}$$

formi una base ortonormale assieme agli stati $|\psi\rangle$ Eq. (1) e $|\chi\rangle$ Eq. (3). Si scriva l'operatore associato ad un'osservabile che discrimina in quale di questi stati si trova il sistema, e se ne determini esplicitamente la matrice nella base degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$.

(5) Siano dati due operatori hermitiani $A = A^\dagger$ e $B = B^\dagger$, e si consideri l'operatore

$$C = AB.$$

Si dimostri che $C = C^\dagger$ se e solo se $AB = BA$.

(6) Si determini l'operatore A_3 che effettua una permutazione ciclica degli stati $|1\rangle$, $2\rangle$, $|3\rangle$. Se ne determinino gli autovalori e gli autovettori. Si discuta se è hermitiano, e si verifichi l'ortogonalità (o meno) dei suoi autovettori.

(7) Si determini la matrice unitaria che fa passare dalla base degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ alla base degli stati $|\psi\rangle$, $|\chi\rangle$, $|\xi\rangle$. *Suggerimento*: è possibile scrivere la matrice immediatamente senza eseguire alcun calcolo.

(8) Si dimostri che (a) condizione necessaria e sufficiente affinché l'operatore $U = 1 + \epsilon i H$ sia unitario al primo ordine in ϵ è che H sia hermitiano; (b) condizione sufficiente affinché l'operatore $U = e^{iH}$ sia unitario è che H sia hermitiano.

(9) Considerare i tre operatori

$$A = |1\rangle\langle 1| - \Big(|2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|\Big) \tag{5}$$

$$B = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - |3\rangle\langle 3| \tag{6}$$

$$C = |1\rangle\langle 1| + |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \tag{7}$$

dove gli stati $|\pm\rangle$ sono dati da

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle \pm |3\rangle\right). \tag{8}$$

Dimostrare che gli operatori A e B sono compatibili, gli operatori A e C sono anche compatibili tra loro, mamentre gli operatori B e C sono invece incompatibili. Determinare la base di autostati comune ad A e B con i rispettivi autovalori, e la (diversa) base di autostati comune ad A e C, di nuovo con i rispettivi autovalori.

(10) Sia dato un sistema che si trova nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1+i}{2}|-\rangle. \tag{19}$$

Determinare (nella base $|\pm\rangle$) la matrice associata ad un'osservabile la cui indeterminazione in questo stato sia nulla.

(11) Determinare l'indeterminazione minima per una misura simultanea degli operatori B e C del problema (9).

(12) Determinare la matrice densità nella base degli stati $|\pm\rangle$ per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle = N\left[(1+\sqrt{2})i|+\rangle + |-\rangle\right]$, dove N è una costante di normalizzazione opportuna, e determinare la sua traccia ed il suo determinante. Per un sistema il cui stato è descritto da questa matrice densità, determinare la probabilità dei risultati delle misure degli operatori $B \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $C \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, e scrivere la matrice densità del sistema dopo la misura di ciascuno di essi.

(13) Determinare la matrice densità dell'esercizio precedente nella base delle matrici di Pauli. Determinare inoltre la matrice densità per un sistema che ha il 50% di probabilità di trovarsi nello stato $|\psi\rangle$ del problema precedente, ed il 50% di probabilità di trovarsi nello stato $|\varphi\rangle = N\left[(1-\sqrt{2})i|+\rangle + |-\rangle\right]$. Qual è il significato fisico di questa matrice densità?

(14) Considerare l'operatore $\mathcal{P}$ tale che, se $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$, allora

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x). \tag{10}$$

Determinare gli elementi di matrice di questo operatore nella base delle coordinate ed utilizzare il risultato per determinare i suoi autovalori e le sue autofunzioni. Discutere se l'operatore dato sia unitario e/o hermitiano.

(15) Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione tale per cui, nei punti $x = x_i$, $f(x_i) = 0$ ma $f'(x_i) \neq 0$, allora

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}}. \tag{11}$$

(16) Determinare mediante il teorema di Noether la quantità (detta viriale) che è classicamente conservata quando vi è invarianza per dilatazioni, ovvero sotto la trasformazione $q \to q' = \lambda q$. Determinare quindi l'operatore che genera le dilatazioni sugli stati quantistici.

(17) Determinare gli elementi di matrice del commutatore $[\hat{p}, \mathcal{P}]$:

$$\langle k|[\hat{p}, \mathcal{P}]|\psi\rangle; \quad \langle q|[\hat{p}, \mathcal{P}]|\psi\rangle, \tag{12}$$

dove $\hat{p}$ è l'operatore impulso, $\mathcal{P}$ l'operatore definito nel problema 14, $|k\rangle$ e $|q\rangle$ sono rispettivamente autostati dell'impulso e della posizione, e $|\psi\rangle$ è uno stato generico.

(18) Dimostrare che gli operatori $\tilde{p} = ap - bq$ e $\tilde{q} = \frac{1}{2}(q/a + p/b)$, con a, b costanti reali qualunque, soddisfano la stessa relazione di commutazione di p e q. Determinare quindi l'operatore unitario $G(v)$ che realizza la trasformazione di Galileo

$$\begin{aligned} q \to \tilde{q} &\equiv G^\dagger(v) q G(v) = q - vt \\ p \to \tilde{p} &\equiv G^\dagger(v) p G(v) = p - mv. \end{aligned} \tag{13}$$

Suggerimento: considerare il caso infinitesimo.

(19) Dimostrare che per un sistema invariante per traslazioni temporali, $\psi^*(q, -t)$ soddisfa la stessa legge di evoluzione temporale che $\psi(q, t)$.
Suggerimento: osservare che $\psi(q, t) = \langle q|\psi(t)\rangle$ e scrivere $|\psi(t)\rangle$ in termini dell'azione di un operatore di evoluzione temporale su uno stato di riferimento.
L'operatore "di inversione temporale" che trasforma $\psi(t)$ in $\psi^*(-t)$ è unitario?

(20) Determinare l'operatore di evoluzione temporale per un sistema a due livelli la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$(a)\;\; H = B\sigma_x; \qquad \text{oppure} \quad (b)\;\; H = Bt\sigma_x, \tag{14}$$

dove B è una costante. Se il sistema al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle, \tag{15}$$

determinare la probabilità che al tempo $t = T$ esso si trovi nello stato $|-\rangle$, dove $|\pm\rangle$ sono gli autostati dell'operatore σ_z associati ad autovalori ± 1. Nel caso (a), determinare inoltre il periodo di oscillazione fra i due stati, ed il valor medio e l'indeterminazione dell'operatore $A = \lambda\sigma_z$ in funzione del tempo t.

(21) Calcolare il commutatore $[[H, \hat{q}], \hat{q}]$ per un'hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \tag{16}$$

ed utilizzare il risultato per dimostrare che

$$\sum_n |\langle k|\hat{q}|n\rangle|^2 (E_n - E_k) = \frac{\hbar^2}{2m}, \tag{17}$$

dove $|n\rangle$ sono autostati dell'hamiltoniana ed E_n gli autovalori associati:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle. \tag{18}$$

(22) Determinare la dipendenza dal tempo dell'operatore viriale $G_D = \frac{1}{2}(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})$ per una hamiltoniana della forma $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$. Sotto che condizione si ha $\frac{d}{dt}\langle\psi|G_D|\psi\rangle = 0$?.

(23) Data la hamiltoniana che descrive il moto di una particella soggetta ad una forza costante (potenziale lineare):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x : \tag{19}$$

(a) si discuta quali tra i seguenti operatori possono essere diagonalizzati simultaneamente: H, x, p, T, V, dove T e V sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale; (b) si determini la dipendenza dal tempo degli operatori T e V in rappresentazione di Heisenberg sia in forma differenziale che integrale, si confrontino tra di loro, e si interpreti il risultato in termini della proprietà di invarianza della hamiltoniana; (c) si discuta la dipendenza dal tempo di x e p in termini delle proprietà di invarianza della hamiltoniana, si determini l'effetto della trasformazione generata dall'operatore x sull'hamiltoniana, e se ne interpreti il risultato.

(24) Si supponga che al tempo $t = 0$ un sistema la cui evoluzione temporale è data dall'hamiltoniana del problema precedente, Eq. (19), si trovi in uno stato in cui la posizione ha una certa indeterminazione $\Delta^2 x$. Si determini l'indeterminazione minima di una misura di posizione al tempo t.

(25) Si determinino le autofunzioni $|\psi_E>$ dell'hamiltoniana H Eq. (19) nella base degli impulsi, ossia $\langle p|\psi_E\rangle$.

Si sfrutti il risultato per determinare l'evoluzione temporale di uno stato nella base degli impulsi: supponendo che un sistema al tempo $t = 0$ si trovi in uno stato avente funzione d'onda

$$\langle p|\psi(t)\rangle\big|_{t=0} = \psi(p, 0) \tag{20}$$

se ne determini la funzione d'onda al tempo t (in rappresentazione di Schrödinger), cioè si determini

$$\psi(p, t) \equiv \langle p|\psi(t)\rangle. \tag{21}$$

(25) Determinare l'indeterminazione in posizione al tempo t per una particella libera che al tempo $t = 0$ è nello stato

$$\psi(x) = N \exp - \frac{x^2}{\beta - i\gamma}. \tag{22}$$

Eseguire il calcolo sia alla Schrödinger che alla Heisenberg.

(26) Si consideri una particella unidimensionale vincolata a muoversi nel segmento $0 \leq x \leq a$ da un potenziale infinito all'esterno del segmento. Si determinino autofunzioni ed autovalori di energia. Si noti inoltre che il potenziale dato ha una simmetria per riflessione attorno al proprio centro. Detto $\mathcal{R}$ l'operatore che realizza questa simmetria, si determini l'elemento di matrice $\langle x|\mathcal{R}|\psi\rangle$, dove $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ è uno stato generico nella base delle coordinate. Si dimostri che le autofunzioni di energia sono autofunzioni di $\mathcal{R}$, e si usi il risultato per determinare il valor medio di x e p in un autostato di energia.

(27) Considerare una buca di potenziale infinitamente stretta ed infinitamente profonda, cioè tale che

$$V(x) = -\kappa\delta(x). \tag{23}$$

Dimostrare che l'unica autofunzione di energia negativa (stato legato) deve essere pari, e determinare l'autovalore di energia associato.

Suggerimento: ricordare che $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$ e determinare dapprima la soluzione quando $x \neq 0$, e poi usare il risultato per determinare la soluzione anche quando $x = 0$.

(28) Considerare un sistema soggetto ad un potenziale della forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > a \\ V_0 & \text{se } |x| < a \end{cases} \tag{24}$$

(barriera di potenziale). Calcolare il coefficiente di trasmissione nella regione $x > a$ di un'onda incidente dalla regione $x < -a$. Nel caso $E > V_0$, dimostrare che esistono valori di energia per i quali $T = 1$, ossia vi è trasmissione completa (effetto Ramsauer-Townsend); nel caso $E < V_0$ dimostrare che il coefficiente di trasmissione non è nulla, ma è esponenzialmente soppresso al crescere della larghezza della barriera.

(29) Considerare una buca di potenziale asimmetrica, cioè tale che

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } x < -a \\ 0 & \text{se } |x| < a \\ V_1 & \text{se } x > a \end{cases}, \tag{25}$$

con $V_0 < V_1$ Determinare sotto quali condizioni lo spettro dei energia contiene almeno uno stato legato.

Suggerimento: imporre la continuità di ψ'/ψ nei punti di raccordo, quindi scrivere la soluzione nella regione $|x| < a$ nella forma $\psi(x) = A\sin(kx + \delta)$.

(30) Calcolare il valor medio di x al tempo t per un sistema soggetto ad un potenziale armonico che al tempo $t = 0$ si trova nello stato

$$e^{-i\frac{pz}{\hbar}}|0\rangle, \tag{26}$$

dove p è l'operatore impulso, z è una costante qualunque, e $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell oscillatore armonico.

Suggerimenti: (a) usare la rappresentazione di Heisenberg; (b) ricordare la relazione tra p ed il generatore delle traslazioni.