PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

MECCANICA QUANTISTICA
anno accademico 2014-2015

(1) Per un sistema meccanico n-dimensionale si scrivano: (a) gli elementi di matrice dell'operatore posizione $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$ tra autostati della posizione $|\vec{x}\rangle$; (b) le autofunzioni dell'operatore impulso nella base degli autostati della posizione $\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle$; (c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.

(2) Si scrivano le autofunzioni dell'hamiltoniana di particella libera in tre dimensioni nella rappresentazione delle coordiante. Si dimostri che se al tempo $t = 0$ una particella libera si trova in uno stato isotropo, cioè tale che $\langle\vec{x}|\psi\rangle$ non dipende dalla direzione del vettore $\vec{x}$ allora le probabilità di una misura di impulso per il sistema dato è isotropa a qualunque tempo t.

(3) Si esprima la funzione d'onda $\psi(\vec{x}+\vec{a}) = \langle\vec{x}+\vec{a}|\psi\rangle$ in termini dell'azione dell'operatore di traslazione n-dimensionale sulla funzione d'onda $\psi(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\psi\rangle$:

$$\langle\vec{x} + \vec{a}|\psi\rangle = \langle\vec{x}|\mathcal{T}_{\vec{a}}|\psi\rangle.$$

Si determini la forma esplicita dell'operatore $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ nella base delle coordinate.
Suggerimento: si consideri inizialmente il caso di traslazione infinitesima, in cui cioè $\vec{a} = \epsilon\vec{n}$, dove $\vec{n}$ è normalizzato a uno, $\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$, ed $\epsilon \ll 1$.

(4) Si consideri un sistema di due particelle di uguale massa m in una dimensione soggette al potenziale

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}m\omega^2\left(5x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 7x_2^2\right),$$

dove x_1 e x_2 sono le coordinate delle due particelle. Si determinino lo spettro di energia del sistema e la sua degenerazione.

(5) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$.

(6) Si esprima la delta di Dirac tridimensionale $\delta^{(3)}(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ in coordinate sferiche, definite come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

.

(7) Per un sistema di due corpi, con funzione d'onda $\langle \vec{x}_1 \vec{x}_2 | \psi \rangle = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, considerare l'operatore di parità $\mathcal{P}$ e l'operatore di scambio $\mathcal{S}$, definiti rispettivamente da $\langle \vec{x}_1 \vec{x}_2 | \mathcal{P} | \psi \rangle = \psi(-\vec{x}_1, -\vec{x}_2)$ e $\langle \vec{x}_1 \vec{x}_2 | \mathcal{S} | \psi \rangle = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. Determinare l'azione degli operatori $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{S}$ esprimendo $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ in coordinate del baricentro e relativa, e scrivendo queste ultime in coordinate sferiche.

(8) Dimostrare che l'operatore impulso radiale p_r è hermitiano verificando che

$$(\langle \psi | p_r | \phi \rangle)^* = \langle \phi | p_r | \psi \rangle$$

attraverso il calcolo esplicito dell'elemento di matrice nella base delle coordinate ed in coordinate sferiche.

(9) Determinare i commutatori $[\hat{L}^i, \hat{x}^j]$ e $[\hat{L}^i, \hat{p}^j]$, ed interpretare il risultato.

(10) Determinare la legge di evoluzione temporale (alla Heisenberg) per l'operatore momento angolare $\vec{L}$, in presenza di una hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$. Confrontare il risultato con il risultato classico.

(11) Determinare in un autostato $|lm\rangle$ del momento angolare i valori medi di L_x^2, L_y^2, L_n^2 ed L_n, dove $L_n = \vec{L} \cdot \vec{n}$ ed $\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ è il versore generico parametrizzato da angoli sferici α e β.

(12) Determinare i valori delle indeterminazioni $(\Delta L_x)^2$ e $(\Delta L_y)^2$ in un autostato di L^2 ed L_z. Determinare inoltre gli stati "di minima indeterminazione" che minimizzano il valore del prodotto $\Delta L_x \Delta L_y$.

(13) Si consideri un sistema di spin uno, e si supponga che la sua evoluzione temporale sia data dall'hamiltoniana

$$H = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

dove $\vec{B}$ è un vettore fisso esterno a componenti reali, e $\vec{S}$ è l'operatore spin. Si determini e risolva la legge del moto per gli stati fisici in rappresentazione di Schrödinger. Si utilizzi la soluzione per determinare la probabilità che una misura di momento angolare eseguita al tempo T su di una particella che si trova nello stato di $m = +1$ al tempo $t = 0$ dia come risultato $m = -1$. Si ripeta tutta la trattazione utilizzando la rappresentazione di Heisenberg per l'evoluzione temporale.

(14) Si supponga che J_i siano gli operatori di spin per qualunque valore dello spin, rappresentati nello spazio corrispondente (quindi come matrici 2×2 per spin $\frac{1}{2}$, come matrici 3×3 per spin 1, e così via). Si consideri una rotazione generica $R_{\vec{n}}(\theta)$ di angolo θ attorno all'asse $\vec{n}$, realizzata in questo spazio (cioè sullo spazio degli spinori per spin $\frac{1}{2}$, sullo spazio dei vettori per spin 1, e così via). Si dimostri che

$$R_{\vec{n}}(\theta) J^i R_{\vec{n}}^{-1}(\theta) = [R_{\vec{n}}(\theta)]_{ij} J^j,$$

dove $[R_{\vec{n}}(\theta)]_{ij}$ è la matrice di rotazione tridimensionale per una rotazione di angolo θ attorno all'asse $\vec{n}$.

(15) Si consideri un sistema di spin $s = 1$ oppure spin $s = \frac{1}{2}$. Si determini in entrambi i casi l'operatore P_m che proietta uno stato generico $|\psi\rangle$ sulla sua componente avente spin lungo l'asse z pari ad m, cioè tale che $P_m|\psi\rangle$ è un autostato di S_z con autovalore pari ad m e tale che $P_m^2 = P_m$ (proiettore). Si scriva il risultato sia in termini di operatori di spin $\vec{S}$, sia esplicitamente come matrice 2×2 (spin 1/2) o 3×3 (spin 1). Si determini quindi l'operatore $P_m(\vec{n})$ che proietta uno stato sulla sua componente avente spin m lungo un asse $\vec{n}$ generico.
Suggerimento: per determinare $P_m(\vec{n})$ si sfrutti il risultato della domanda precedente.

(16) Determinare il valor medio dello spin totale per un sistema di due particelle di spin 1/2 che si trovano nello stato in cui le terze componenti dello spin delle due particelle sono dirette in verso opposto (ad esempio $s_z^1 = 1/2$, $s_z^2 = -1/2$).

(17) Sia dato un sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ che interagiscono attraverso la hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1 \vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2,$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare relativo del sistema di due particelle. Si separi completamente il problema, e supponendo noto e non-degenere lo spettro dell'hamiltoniana radiale, si determinino lo spettro di H e la sua degenerazione.

(18) Si dimostri che la funzione d'onda

$$\psi_\ell(\vec{x}) = d_{ij\ldots k} x_i x_j \ldots x_k$$

dove $d_{ij\ldots k}$ è completamente simmetrica sotto lo scambio di qualunque coppia di indici, e tale che

$$\sum_{i=1}^{3} d_{i_1 \ldots i \ldots i \ldots i_\ell} = 0$$

per qualunque coppia di indici i, j è un'autofunzione del momento angolare totale

$$L^2 \psi_\ell(\vec{x}) = \hbar^2 \ell(\ell + 1) \psi_\ell(\vec{x}),$$

dove ℓ è il numero di indici di $d_{ij\ldots k}$. Si discuta la consistenza del risultato con la regola di composizione dei momenti angolari. *Suggerimento:* ricordare la relazione tra momento angolare, quadrato dello impulso, e quadrato dell'impulso radiale.

(19) Si determini lo spettro degli autovalori di energia associati al valore $l = 0$ del momento angolare orbitale per una buca di potenziale sferica infinitamente profonda, tale cioé

che il potenziale in coordinate sferiche sia $V(r) = 0$ se $r < a$ e infinito se $r > a$, dove r è la coordinata radiale.

(20) Considerare un sistema di una particella soggetta ad un potenziale centrale $V(r)$. Determinare la Hamiltoniana e le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg in un sistema di riferimento rotante con velocita ω intorno ad un asse qualunque. Specificare un inisieme di operatori commutanti con l'hamiltoniana i cui autovalori determinano completamente lo stato del sistema, e determinare la degenerazione degli autostati di energia.

(21) Determinare lo stato fondamentale (a meno della normalizzazione) e la forma generica degli stati eccitati per le autofunzioni dell'oscillatore armonico isotropo in coordinate sferiche.

(22) Si consideri un oscillatore armonico *bidimensionale* isotropo avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^2,$$

con operatori di distruzione $a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x_i + i \frac{p_i}{m\omega} \right)$. Si definiscano gli operatori

$$j_a \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j,$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j. Si determinino le relazioni di commutazione degli operatori j^a fra di loro e con l'hamiltoniana. Si esprima l'operatore $j_1^2 + j_2^2 + j_3^2$ in termini dell'hamiltoniana, e si utilizzi il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana e la sua degenerazione. Si confronti con il risultato che si ottiene separando il problema in coordinate cartesiane.

(23) Determinare le relazioni di commutazione dei nove operatori $a_i^\dagger a_j$ (dove i, j possono assumere qualunque valore da uno a tre) tra di loro e con l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico. Determinare in particolare le relazioni di commutazione fra i tre operatori $O_i = \epsilon^{ijk} a_j^\dagger a_k$, e la loro espressione esplicita nella base delle coordinate. Discutere la degenerazione dello spettro dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo alla luce dei risultati ottenuti.

(24) Per un sistema tridimensionale soggetto al potenziale centrale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r^p}$$

(con κ costante reale positiva) determinare la dipendenza degli autovalori di energia da κ e dalla massa m.

Dato uno stato avente funzione d'onda $\psi(r)$, si consideri l'insieme di stati (correttamente normalizzati) $\psi(\lambda r)$. Discutere come variano il valor medio dell'energia cinetica

$\langle T\rangle$ e dell'energia potenziale $\langle V\rangle$ in tale famiglia di stati al variare di λ. Che cosa succede se $p > 2$?

(25) Considerare una Hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q})$, e ricordare che in uno in uno stato stazionario $\langle [A, H]\rangle = 0$ per ogni operatore A. Dimostrare che, scegliendo $A = \vec{q}\cdot\vec{p}$, se ne deduce che

$$2\langle T\rangle = \langle \vec{q}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{q})\rangle.$$

Confrontare risultato con quello del problema precedente.

(26) Considerare un atomo di idrogeno immerso in un campo magnetico, la cui hamiltoniana è data da

$$H = H_0 - \omega L_z,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno, ω è una costante reale positiva, e L_z è la terza componente dell'operatore momento angolare. Mostrare che gli autostati $|nlm\rangle$ dell'atomo di idrogeno sono anche autostati di questa hamiltoniana, e determinare lo spettro di valori di energia e la degenerazione.
Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|21-1\rangle - |211\rangle\right).$$

Determinare la probabilità che ad un tempo t il sistema si trovi nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|21-1\rangle + |211\rangle\right),$$

e determinare il valor medio dell'energia a tutti i tempi t.

(27) Determinare il valor medio di r^k nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, con k intero. Utilizzare il risultato per determinare, in questo stato il valor medio della posizione radiale, la sua varianza, ed il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica. Determinare inoltre a quale distanza dal nucleo la probabilità di posizione è massima, e confrontare il risultato con il valor medio per la probabilità di posizione.

(28) Determinare la azione classica in termini delle condizioni iniziali e finali per una particella libera unidimensionale. Determinare quindi l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione temporale (propagatore)

$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t'| e^{\frac{1}{i\hbar}H(t'-t)}|q', t'\rangle$$

e dimostrare che esso, a meno della normalizzazione, coincide con l'esponenziale di $i/\hbar$ volte l'azione classica.
Suggerimento: inserire una risoluzione dell'identità rispetto agli autostati dell impulso

sia sullo stato iniziale che su quello finale.
Determinare il risultato nel limite $t' \to t$.

(29) Dimostrare le seguenti proprietà del propagatore $K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = \langle \vec{x}' | S(t', t) | \vec{x} \rangle$:

(a)

$$K^*(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t; \vec{x}', t');$$

(b) se il sistema è invariante per traslazioni allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}' - \vec{x}; t', t);$$

(c) se le autofunzioni della hamiltoniana sono reali allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t'; \vec{x}', t);$$

(d) se le autofunzioni della hamiltoniana sono autostati della parità allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(-\vec{x}', t'; -\vec{x}, t).$$

(30) Considerare una particella che si muove in un campo elettrico costante

$$\vec{E} = \begin{cases} \mathcal{E}\hat{x} & x > a \text{ per ogni } y, z \\ 0 & -a < x < a \\ -\mathcal{E}\hat{x} & x > a \text{ per ogni } y, z \end{cases},$$

dove $\hat{x}$ è un vettore di norma uno diretto lungo l'asse x. Determinare lo spettro di energia usando l'approssimazione WKB.
Suggerimenti: (1) Ricavare il campo elettrico da un potenziale opportuno; (b) ridurre il problema ad un problema unidimensionale separando le variabili; (c) scrivere la soluzione WKB nelle tre regioni e raccordare le tre soluzioni imponendo che la soluzione nella regione centrale sia unica.

(31) Determinare la perturbazione ai livelli energetici fino al primo ordine non-banale (cioè il primo ordine per cui la perturbazione non si annulla) dovuta al potenziale

$$V(x) = -e\mathcal{E}x$$

per:
(a) una particella in una buca di potenziale unidimensionale infinitamente profonda di larghezza a centrata in x_0;
(b) un oscillatore armonico unidimensionale.

(32) Si consideri una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad un potenziale armonico isotropo. Si dimostri che

$$\langle nlm | \hat{z} | 000 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{n0} \delta_{l1} \delta_{m0},$$

dove $|nlm\rangle$ sono autofunzione di energia e di momento angolare con $E_{nl} = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right)$, e $\hat{z}$ è l'operatore posizione lungo l'asse z.
Suggerimento: Si ricordi la relazione tra autofunzioni dell'oscillatore armonico isotropo in coordinate cartesiane ed in coordinate sferiche, e l'espressione dell'operatore $\hat{z}$ in termini di operatori di creazione e distruzione per l'oscillatore armonico unidimensionale.
Usando questo risultato, si determini la perturbazione allo stato fondamentale fino al secondo ordine pertubativo per l'energia e fino al primo ordine per lo stato, quando il sistema è soggetto ad un campo elettrico diretto lungo l'asse z.

(33) Si consideri un oscillatore armonico bidimensionale con potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + \lambda xy.$$

Si tratti l'ultimo termine come una perturbazione. Si determini la correzione ai primi due livelli eccitati al primo ordine in λ e l'effetto della perturbazione sulla loro degenerazione. Si determini la soluzione esatta del problema, si confronti con il risultato perturbativo, e si discuta per quali valori del parametro λ l'approssimazione perturbativa è buona.
Suggerimento: per determinare la soluzione esatta, si ricordi il metodo usato per risolvere il problema (4).

(34) Si consideri un oscillatore armonico undimensionale, soggetto ad un campo elettrico costante nello spazio e gaussianamente smorzato nel tempo, ossia un potenziale della forma

$$V(x, t) = -e\mathcal{E}x \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right),$$

dove $\mathcal{E}$ e τ sono un parametri reali positivi. Si determini la probabiltà al primo ordine che il sistema che al tempo $t = -\infty$ si trova nello n-esimo autostato di energia dell oscillatore armonico imperturbato $|n\rangle$ subisca una transizione al generico stato $|k\rangle$ se la perturbazione agisce fino al tempo $t = \infty$.

(35) Determinare la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born per la diffusione da potenziale di Yukawa

$$V(r) = V_0 \frac{\lambda}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}.$$

Ricavare quindi il risultato per la diffusione da potenziale coulombiano

$$V(r) = e^2 \frac{1}{r}$$

come caso limite.
Esprimere il risultato in terminidell'energia E della particella incidente e dell'angolo

di *scattering* θ tra le direzioni degli impulsi $\vec{k}$, $\vec{k}'$ della particella entrante e di quella uscente.

Suggerimento: Esprimere in termini di E e θ il modulo dell'impulso trasferito $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$.

Nel caso coulombiano, discutere la dipendenza della sezione d'urto da E e da $\hbar$.

(36) Si considerino due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ in una buca di potenziale unidimensionale infinita di larghezza L. Si supponga che le particelle interagiscano attraverso il potenziale $V = k\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$, dove $\vec{s}_i$ sono gli spin delle due particelle. Si determinino lo stato fondamentale e il primo stato eccitato del sistema supponendo $|k| << \frac{1}{L^2 m}$.

(37) Si considerino due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ e massa m che interagiscono fra di loro attraverso il potenziale

$$V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{1}{2} m\omega^2 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 + B\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

dove $\vec{x}_i$ e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e spin delle due particelle. Si determini lo spettro di energia e la sua degenerazione, supponendo che B ed ω siano costanti reali incommensurabili.