# PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

## PRIMA PARTE

anno accademico 2015-2016

(1) Si consideri una particella che può colpire uno schermo diviso in tre zone, indicate dai ket $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, e si supponga che essa si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle - \frac{1}{2}|3\rangle. \tag{1}$$

(a) Qual è la probabilità che la particella colpisca ciascuna delle tre zone dello schermo?
(b) Supponiamo che lo schermo in corrispondenza della zona corrispondente al ket $|2\rangle$ e $|3\rangle$ sia trasparente. Qual è la probabilità che la particella non sia fermata dallo schermo?
(c) Se non è stata fermata dallo schermo, in che stato si trova?
(d) Supponiamo di eseguire dapprima una misura che rivela che essa non è stata fermata dallo schermo, e quindi una misura che rivela da quale settore dello schermo è passata. Con che probabilità si rivela che essa è passata da ciascun settore dello schermo? Le probabiltà sono uguali o diverse da quelle trovate al punto (a)?

(2) Supponiamo ora che a monte dello schermo vi sia un altro schermo con due fenditure. Le particelle che passano dalla prima fenditura si trovano nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1), invece quelle che passano dalla seconda fenditura si trovano nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle. \tag{2}$$

Si supponga la configurazione del sistema completamente simmetrica rispetto alla scambio delle due fenditure. Qual è ora la probabilità di rivelare il sistema in ciascuna delle tre zone dello schermo
(a) se non si misura da che fenditura è passata la particella
(b) se si misura che è passata dalla seconda fenditura.

(3) Supponiamo di poter misurare se il sistema del problema (1) si trovi nello stato

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|3\rangle. \tag{3}$$

Qual è il risultato della misura se viene eseguita a monte dello schermo, o a valle dello schermo? I risultati nei due casi sono uguali o diversi? Perché?

(4) Si determini che condizione devono soddisfare i coefficienti $a$, $b$, $c$ affinché lo stato

$$|\phi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle \tag{4}$$

formi una base assieme agli stati $|\psi\rangle$ Eq. (1) e $|\chi\rangle$ Eq. (3).

(5) Sul sistema della domanda precedente viene eseguita una prima misura, che determina in quale dei tre stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ esso si trova. Viene quindi eseguita una seconda misura, che determina in quale dei tre stati $|\psi\rangle$, $|\chi\rangle$, $|\phi\rangle$ si trova. Se il sistema è preparato nello stato $|\psi\rangle$, qual è la probabilità che la seconda misura lo riveli nello stato $|\chi\rangle$?

(6) Si consideri un'osservabile che corrisponda ad una misura che dà come risultato $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1), $-1$ quando esso si trova nello stato $|\chi\rangle$ Eq. (3), e 0 quando esso si trova nello stato $|\phi\rangle$ Eq. (4). Se ne scriva la matrice nella base degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$.

(7) Dati due operatori hermitiani $A$, $B$, si determini l'aggiunto del loro prodotto $C = AB$. Si determini inoltre quale condizione devono soddisfare $A$ e $B$ affinché: (a) $C = C^\dagger$ oppure (b) $C = -C^\dagger$.

(8) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si determini esplicitamente la matrice $e^A$.

(9) Facendo riferimento al problema (4), si determini la matrice unitaria che fa passare dalla base degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ alla base degli stati $|\psi\rangle$, $|\chi\rangle$, $|\xi\rangle$. *Suggerimento*: è possibile scrivere la matrice immediatamente senza eseguire alcun calcolo.

(10) Quale proprietà hanno gli autoivalori di una matrice unitaria? E quelli di una matrice che è simultaneamente unitaria ed hermitiana?

(11) Si considerei un operatore $P$ e per uno stato generico si definisca la decomposizione

$$|\psi\rangle = P|\psi\rangle + (I - P)\,|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle, \tag{5}$$

dove $I$ è l'operatore identità e nell'ultimo passaggio abbaimo definito

$$|\alpha\rangle = P|\psi\rangle \tag{6}$$

e

$$|\beta\rangle = |\psi\rangle - P|\psi\rangle. \tag{7}$$

L'operatore $P$ è detto proiettore se $P|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ e $\langle\beta|\alpha\rangle = 0$. Si dimostri che condizione necessaria e sufficiente affinché $P$ sia un operatrore di proiezione è che $P^2 = P = P^\dagger$.

(12) Si consideri l'operatore hermitiano avente elementi di matrice $\langle i|A|j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si dimostri che gli stati aventi componenti $\langle i|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\langle i|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\langle i|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autostati di questo operatore, e che questi stati formano una base ortonormale; si determini inoltre lo spettro (degenere) di autovalori associati.

(b) Si considerino quindi gli operatori aventi elementi di matrice $\langle i|B_1|j\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\langle i|B_2|j\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si dimostri che uno di questi operatori è compatibile con $A$ e l'altro no. Per quello compatibile, se ne determini una base di autovettori comune con $A$, e si dimostri che assieme ad $A$ esso fornisce un insieme completo di operatori nello spazio dato. Per quello non compatibile, si determini l'indeterminazione minima della misura di tale operatore in uno stato qualunque in termini dell'indeterminazione della misura di $A$ in quello stato.

(13) Determinare la matrice densità per un sistema che si trova con probabilità $\frac{1}{2}$ in ciascuno dei due stati $|\phi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + i\sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$, $|\phi_2\rangle = i\sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$, e dimostrare che essa coincide con la matrice densità per un sistema che si trova con probabilità $\frac{3}{4}$ nello stato $|+\rangle$ e con probabilità $\frac{1}{4}$ nello stato $|-\rangle$

(14) Determinare la matrice densità nella base degli stati $|\pm\rangle$ per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle = N\left[(1+\sqrt{2})i|+\rangle + |-\rangle\right]$, dove $N$ è una costante di normalizzazione opportuna, e determinare la sua traccia ed il suo determinante. Per un sistema il cui stato è descritto da questa matrice densità, determinare la probabilità dei risultati delle misure degli operatori $B \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $C \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, e scrivere la matrice densità del sistema dopo la misura di ciascuno di essi.

(15) Determinare la matrice densità dell'esercizio precedente nella base delle matrici di Pauli. Determinare inoltre la matrice densità per un sistema che ha il 50% di probabilità di trovarsi nello stato $|\psi\rangle$ del problema precedente, ed il 50% di probabilità di trovarsi nello stato $|\varphi\rangle = N\left[(1-\sqrt{2})i|+\rangle + |-\rangle\right]$. Qual è il significato fisico di questa matrice densità?

(16) Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione tale per cui, nei punti $x = x_i$, $f(x_i) = 0$ ma $f'(x_i) \neq 0$, allora

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}}. \tag{8}$$

(17) Determinare autovalori ed autofunzioni dell'operatore $\mathcal{P}$ tale che

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle. \tag{9}$$

Discutere se questo operatore è unitario e/o hermitiano.

(18) Determinare mediante il teorema di Noether la quantità (detta viriale) che è classicamente conservata quando vi è invarianza per dilatazioni, ovvero sotto la trasformazione

$q \to q' = \lambda q$. Determinare quindi l'operatore che genera le dilatazioni sugli stati quantistici. Verificare che questo operatore coincide con quello che si ottiene dal viriale classico usando il principio di corrispondenza $p \to \hat{p}$, $q \to \hat{q}$.

(19) Dimostrare che

$$[\mathcal{P}, |\hat{p}|] = 0, \tag{10}$$

dove $\mathcal{P}$ è l'operatore definito nel problema (17) e l'operatore $|\hat{p}|$ è definito come

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar |k| |k\rangle\langle k| \tag{11}$$

in termini degli autostati $|k\rangle$ dell'operatore impulso, che soddisfano a

$$\hat{p}|k\rangle = \hbar k |k\rangle. \tag{12}$$

Determinare le autofunzioni comuni agli operatori $\mathcal{P}$ e $|\hat{p}|$.

(20) Dimostrare che l'operatore $x^2 p - i\hbar x$ è hermitiano.

(21) Dimostrare che gli operatori $\tilde{p} = ap - bq$ e $\tilde{q} = \frac{1}{2}(q/a + p/b)$, con $a$, $b$ costanti reali qualunque, soddisfano la stessa relazione di commutazione di $p$ e $q$. Determinare quindi l'operatore unitario $G(v)$ che realizza la trasformazione di Galileo

$$\begin{aligned} q \to \tilde{q} &\equiv G^\dagger(v) q G(v) = q - vt \\ p \to \tilde{p} &\equiv G^\dagger(v) p G(v) = p - mv. \end{aligned} \tag{13}$$

*Suggerimento:* considerare il caso infinitesimo.

(22) Si consideri un sistema a due livelli, la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = E_0 \Big( |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| \Big). \tag{14}$$

Se il sistema si trova inizialmente nello stato $|+\rangle$, con che probabilità si troverà nello stato $|-\rangle$ al tempo $t$? Determinare il periodo delle oscillazioni tra i due stati.

(23) Considerare un sistema la cui evoluzione temporale è data da una hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}). \tag{15}$$

(a) Se $\psi(x,t)$ è una soluzione della equazione di Schrödinger, si dimostri che solo uno fra gli stati $\psi^*(x,t)$, $\psi(x,-t)$, $\psi^*(x,-t)$ è anche soluzione. Chiamiamo questo stato $\tilde{\psi}(x,t)$.

(b) Se $< q(t) >$ e $< p(t) >$ sono i valori medi di posizione ed impulso in funzione del tempo nello stato $\psi(x,t)$, quali sono i valori medi di posizione ed impulso nello stato $\tilde{\psi}(x,t)$?

(c) La trasformazione $\psi(x,t) \to \tilde{\psi}(x,t)$ è unitaria?

(d) Che forma assume la trasformazione $\psi(x,t) \to \tilde{\psi}(x,t)$ nella rappresentazione degli impulsi?

(24) Considerare una particella libera e suppore che si possa eseguire una misura di posizione su di essa al tempo $t = 0$, dopo la quale la particella si trova in un autostato di posizione $x = x_0$. Determinare la funzione d'onda di questa particella ad un tempo qualunque $t$ (questa funzione d'onda è detta propagatore di Feynman).
*Suggerimento:* per calcolare l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp i \left(\lambda x^2 + \beta x\right)$, con $\lambda$ reale positivo, sostituire $\lambda$ con $\lambda' = \lambda + i\epsilon$ e porre $\epsilon = 0$ al termine del calcolo.

(25) Per un sistema la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + ax, \qquad (16)$$

si determinino (in rappresentazione di Heisenberg) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx^2}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dp^2}{dt}$.

(26) Si supponga di eseguire una misura di posizione al tempo $t = t_0 > 0$, per un sistema la cui evoluzione temporale è governata dall'hamiltoniana Eq. (16). Determinare l'indeterminazione dellla misura nel caso in cui (a) al tempo $t = 0$ sia stata eseguita una misura di posizione; (b) al tempo $t = 0$ la posizione del sistema sia nota con indeterminazione $\Delta^2$.

(27) Si consideri una particella libera la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0 x} e^{-\alpha x^2/2} \qquad (17),$$

dove $\alpha$ e $k_0$ sono costanti reali positive.
Si determini l'indeterminazione per una misura di energia.

(28) Si consideri una particella libera la cui funzione d'onda nella base delle posizioni al tempo $t = 0$ è

$$\psi(x,0) = N \left[ e^{ik_0 x} e^{-\alpha(x+x_0)^2/2} + e^{-ik_0 x} e^{-\alpha(x-x_0)^2/2} \right] \qquad (18),$$

dove $\alpha$ e $k_0$ sono costanti reali positive, e $N$ è una costante di normalizzazione opportuna (la cui determinazione non è richiesta).
Si determini la funzione d'onda nella base degli impulsi. Si determini quindi la densità probabilità $\mathcal{P}(x,t)$ per una misura di posizione a qualunque tempo $t$. Si discutano in particolare:
(a) La probabilità $\mathcal{P}(x,t)$ quando $t$ è molto grande;
(b) La dipendenza dal tempo della probabilità $\mathcal{P}(0,t)$ di trovare la particella nella origine a qualunque tempo $t$.

(29) Si determinino le autofunzioni $|\psi_E >$ dell'hamiltoniana $H$ Eq. (16) nella base degli impulsi, ossia $\langle p|\psi_E\rangle$.

Si sfrutti il risultato per determinare l'evoluzione temporale di uno stato nella base degli impulsi: supponendo che un sistema al tempo $t = 0$ si trovi in uno stato avente funzione d'onda

$$\langle p|\psi(t)\rangle\big|_{t=0} = \psi(p, 0) \tag{19}$$

se ne determini la funzione d'onda al tempo $t$ (in rappresentazione di Schrödinger), cioè si determini

$$\psi(p, t) \equiv \langle p|\psi(t)\rangle. \tag{20}$$

(30) Una particella di massa $m$ in una buca di potenziale infinita di semilarghezza $a$ si trova in uno stato tale per cui una misura di energia può dare come risultato solo due valori: il più basso dello spettro e quello immediatamente superiore. Scrivere la funzione d'onda per questo stato, sapendo il valor medio dell'impulso vale $\langle p\rangle = \frac{2\hbar}{3a}$. Determinare il valor medio dell'impulso a tempi successivi, ed in particolare l'intervallo di tempo $t$ dopo il quale l'impulso ha nuovamente valor medio nullo.

(31) Si consideri una particella di massa $m$ in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x), \tag{21}$$

dove $\Omega$ è una costante reale positiva e $\delta(x)$ è la delta di Dirac.

(a) Si dimostri che il sistema ammette un unico stato legato, se ne determinino l'autovalore di energia e la corrispondente autofunzione, e si determini il valore della posizione $x_0$ tale per cui la probabilità di trovare la particella con $x < x_0$ è pari a $\frac{1}{2}$.

(b) Si determinino i coefficienti di trasmissione e riflessione per un fascio stazionario incidente su questo potenziale, ed in particolare il valore dell'energia per cui il flusso trasmesso è uguale al flusso riflesso.

(32) Dimostrare che per qualunque sistema unidimensionale l'operatore parità $\mathcal{P}$ si può rappresentare in termini degli operatori posizione ed impulso come

$$\mathcal{P} = e^{i\pi N}, \tag{22}$$

dove $N$ è l'operatore numero $N = a^\dagger a$, con $a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(x + ip)$.

(33) Si consideri un sistema soggetto ad un potenziale armonico, ossia con hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{23}$$

che al tempo $t = 0$ si trova nello stato fondamentale. A partire dal tempo $t + \varepsilon$, sul sistema agisce anche una forza elettrostatica costante, e l'hamiltoniana diventa

$$H = H_0 - Ex. \tag{24}$$

Si determinino lo spettro dell'hamiltoniana Eq. (34), ed i valore medi di posizione ed impulso a tutti i tempi successivi.