PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

PRIMA PARTE
anno accademico 2017-2018

(1) Si consideri una particella che può colpire uno schermo in cui sono praticate tre fenditure, indicate dai ket $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, e si supponga che essa si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{i}{2}|3\rangle \tag{1}$$

(a) Qual è la probabilità che un rivelatore posto in prossimità di ciascuna delle tre fenditure riveli il passaggio della particella?
come si calcola la probabilità dei risultati di una misura

(b) Supponiamo ora che solo la prima fenditura sia equipaggiata da un rivelatore: qual è la probabilità che esso non venga attivato al passaggio della particella?
come si calcola la probabilità che un evento non accada?

(c) Se il rivelatore del punto precedente non viene attivato, in che stato si trova la particella a valle dello schermo?
in che stato si trova un sistema dopo la misura? Spiegare la misura come proiezione

(d) Supponiamo ora che i rivelatori relativi alla seconda ed alla terza fenditura si trovino a valle di quello relativo alla prima, e che dapprima il rivelatore associato alla prima fenditura non rilevi il passaggio della particella. Qual è la probabilità che questo si verifichi e che quindi l'uno o l'altro dei due rivelatori restanti si attivi? Queste probabilità sono diverse o eguali a quelle determinate alla prima domanda?
come si calcola la probabilità di eventi successivi? Come si compongono le probabilità?

(2) Supponiamo ora che, dopo essere passate attraverso la fenditura del problema precedente, le particelle siano rivelate su uno schermo, diviso in una parte alta, indicata dallo stato $|+\rangle$ ed una parte bassa, indicata dallo stato $|-\rangle$. Le particelle che passano dalla prima fenditura sono deflesse in modo da non essere rivelate dallo schermo. Una particella che passa dalla seconda fenditura si trova nello stato sovrapposizione

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right), \tag{2}$$

cui quindi corrisponde lo stato $|2\rangle$, mentre una particella che passa dalla terza fenditura si trovano nello stato sovrapposizione

$$|\phi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right), \tag{3}$$

cui quindi corrisponde lo stato $|3\rangle$. Determinare lo stato, e quindi la probabilità che la particella sia rivelata nella parte alta o bassa dello schermo nei tre casi seguenti

(a) Nessuna delle fenditure è equipaggiata di un rivelatore (non si sa da che fenditura è passata la particella).
Che cosa ci dice il principio di sovrapposizione?

(b) Tutte le fenditure sono equipaggiate di un rivelatore (si sa da che fenditura è passata la particella).
Che cosa succede quando si esegue una misura?

(c) Solo la seconda delle tre fenditure è equipaggiata di un rivelatore (si sa solo se la particella è passata dalla seconda fenditura o meno).
Ricordare il punto (c) del problema precedente

Spiegare le eventuali differenze tra i risultati trovati nei tre casi.
In particolare, discutere se la fase *overall* degli stati $|\chi\rangle$ $|\phi\rangle$ sia rilevante o meno in ciascuno dei tre casi.
Caso (a) vs. (b): che cosa si compone quando si esegue o non si esegue una misura?
Caso (b) vs. (c): la misura determina lo stato completamente o no?
Fase: quando è che la fase di uno stato è rilevante? Fase assoluta e fase relativa.

(3) Nella situazione del problema (1a), supponiamo ora di avere un "filtro", cioé uno schermo con una fenditura tale per cui solo le particelle che si trovano nello stato

$$|\alpha\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{i}{2}|3\rangle \tag{4}$$

passano attraverso la fenditura. Qual è la probabilità che la particella del problema (1) passi attraverso il filtro se esso viene messo

(a) a monte
(b) a valle

dello schermo dotato di rivelatori su tutte le fenditure. Spiegare il risultato.
Lo stato $|\alpha\rangle$ e lo stato $|\psi\rangle$ come sono l'uno rispetto all'altro?

(4) Può esistere un'osservabile tale che la sua misura ci dica se la particella dei problemi (1,3) si trovi nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1) oppure nello stato $|\alpha\rangle$ Eq. (4)? Se può esistere, e se l'osservabile ci dice che il sistema non si trova in nessuno di quei due stati, allora in che stato si trova il sistema?
Che proprietà hanno gli stati associati a tutti i valori possibili della misura di un'osservabile?

(5) Sia A l'operatore associato ad una generica osservabile.

(a) È vero che se si effettua una misura dell'osservabile A su di un sistema nello stato $|\alpha\rangle$, il sistema dopo la misura si trova nello stato $|\beta\rangle = A|\alpha\rangle$?
(Es. 4.4 Picasso) quali sono i possibili risultati di una misura e in che stato si trova il sistema dopo la misura?

(b) Rispondere alla domanda precedente nel caso in cui $|\alpha\rangle$ è un autostato dell'operatore A.
supporre 0 sia un autovalore di A: il vettore nullo corrisponde ad uno sistema fisico?

(6) Siano A e B operatori hermitiani e sia $C = A\,B$.

(a) Determinare l'operatore $C^\dagger$ in termini di A e B.
come si calcola l'aggiunto di un prodotto di operatori?

(b) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = C^\dagger$.
qual è la definizione di commutatore di due operatori?

(c) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = -C^\dagger$.
qual è la definizione di anticommutatore di due operatori?

(7) Dimostrare che un operatore generico O può essere scritto come somma di un operatore hermitiano e di un operatore anti-hermitiano.
quali sono le definizioni di operatore hermitiano e di operatore anti-hermitiano? come si costruisce un operatore hermitiano (o antihermitiano) partendo da un operatore generico?

(8) Sia A un operatore tale che,

$$[A, A^\dagger] = 1\,, \qquad \text{e} \qquad A^2 = (A^\dagger)^2 = 0\,, \tag{5}$$

e sia $N = A^\dagger A$.

(a) A è hermitiano?

(b) Esprimere N^2 in termini di N.

(c) Determinare gli autovalori dell'operatore N.

(9) Sia dato l'operatore $U = \exp(i\alpha H)$, con α numero reale.
qual è la definizione di esponenziale di un operatore?

(a) Dimostrare che se H è hermitiano, allora U è unitario.
quali sono le definizioni di operatore hermitiano e di operatore unitario?

(b) Dimostrare al prim'ordine in α che se U è unitario, allora H è hermitiano.
come si calcola lo sviluppo in serie di una funzione $f(A)$ dove A è un operatore?

(10) Si consideri un operatore P e per uno stato generico si definisca la decomposizione

$$|\psi\rangle = P|\psi\rangle + (\mathbb{I} - P)\,|\psi\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle, \tag{6}$$

dove $\mathbb{I}$ è l'operatore identità e nell'ultimo passaggio abbiamo definito

$$|\alpha\rangle = P|\psi\rangle \tag{7}$$

e

$$|\beta\rangle = |\psi\rangle - P|\psi\rangle. \tag{8}$$

L'operatore P è detto proiettore se $P|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ e $\langle\beta|\alpha\rangle = 0$.

(a) Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché P sia un operatore di proiezione è che $P^2 = P = P^\dagger$.
Necessaria: scrivere esplicitamente la Eq. (8) usando la definizione Eq. (6); sufficiente: calcolare la Eq. (8) usando la condizione di idempotenza

(b) Costruire esplicitamente l'operatore di proiezione associato alla misura del problema (1), punto (b) (rivelatore associato alla prima fenditura) scrivendolo come matrice 3×3 nella base degli stati $|1\rangle,\ |2\rangle, |3\rangle$.
Come si passa dalla notazione di Dirac alla notazione matriciale?

(c) Costruire esplicitamente l'operatore di proiezione associato alla misura del problema (3), punto (b) (misura che rivela se il sistema è nello stato $|\alpha\rangle$ Eq. (4), scrivendolo come matrice 3×3 nella base degli stati $|1\rangle,\ |2\rangle, |3\rangle$.
Come nel caso precedente

(11) Siano A e B due osservabili compatibili. Supponiamo che il sistema si trovi in un autostato di A. Se lo spettro di A e B è non-degenere che risultato producono una misura prima di A e poi di B, oppure prima di B e poi di A.
In che stato si trova il sistema dopo la misura di un'osservabile?

Se invece lo spettro di A è degenere, quali sono i possibili risultati di una misura prima di A e poi di B, oppure prima di B e poi di A, e quali ne sono le rispettive probabilità?
La misura di A produce un risultato nel sottospazio degenere o no? Che succede in ciascun caso.

(12) Costruire gli operatori seguenti, scrivendone la matrice 3×3 nella base degli stati $|1\rangle,\ |2\rangle, |3\rangle$.

(a) A, associato ad un'osservabile che nella situazione del problema (4) dà come risultati della misura $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1), 0 quando esso si trova nello stato $|\alpha\rangle$ Eq. (4), e -1 quando esso non si trova né nello stato $|\psi\rangle$, né nello stato $|\alpha\rangle$. Se ne scriva esplicitamente la matrice nella base degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle, |3\rangle$;

(b) B, associato all'osservabile che dà $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\psi\rangle$ (come prima), ma -1 in tutti gli altri casi;

(c) C, associato all'osservabile che dà $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\psi\rangle$ (come prima), 0, quando si trova nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)$ e , -1, quando si trova nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle - |\beta\rangle)$, dove $|\beta\rangle$ è lo stato in cui il sistema si trova quando non è né nello stato $|\psi\rangle$, né nello stato $|\alpha\rangle$

In tutti i casi: come si scrive l'operatore associato ad un'osservabile in notazione di Dirac? Come si passa dalla notazione di Dirac alla forma matriciale?

(13) Dimostrare che gli operatori A e C del problema precedente sono incompatibili, mentre B e C sono compatibili.
Formalmente: qual è la condizione di compatibilità? Fisicamente: che cosa significa?

(14) Calcolare l'indeterminazione per la misura simultanea degli operatori A e C del problema precedente in uno stato generico $|\psi\rangle$, e si determinare quindi lo o gli stati $|\psi_{\min}\rangle$ per cui questa indeterminazione è minima.
A che cosa è uguale l'indeterminazione? Qual è la condizione di minima indeterminazione?

(15) Considerare un insieme di molti oggetti, ciascuno dei quali che può trovarsi in uno dei due stati $|+\rangle$ o $|-\rangle$: ad esempio, un insieme di fotoni, ciascuno dei quali può trovarsi in uno di due stati di polarizzazione. Considerare le seguenti miscele statistiche di N stati ("N fotoni") ($N \gg 1$):

i) $N/2$ fotoni nello stato $|+\rangle$ e $N/2$ fotoni nello stato $|-\rangle$;

ii) $N/2$ fotoni nello stato $|\psi\rangle \equiv \cos\theta|1\rangle + \sin\theta e^{i\phi}|2\rangle$ e $N/2$ fotoni nello stato $|\phi\rangle \equiv -\sin\theta|1\rangle + \cos\theta e^{i\phi}|2\rangle$, dove $|1\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ e $|2\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$;

iii) $N/4$ fotoni negli stati $|+\rangle$, $|-\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$.

(a) Calcolare, nei casi *i)*, *ii)* e *iii)* le probabilità di trovare i fotoni rispettivamente nello stato $|+\rangle$, $|-\rangle$ e $|\psi\rangle$.
come si calcola la probabilità di una misura per una miscela statistica?

(b) È possibile, attraverso la misura anche ripetuta di qualunque osservabile in questo spazio, distinguere le miscele statistiche *i)*, *ii)* e *iii)*?
qual è la probabilità di trovare uno stato con polarizzazione generica in una delle tre miscele?

(c) Determinare la matrice densità ρ, nella base degli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$, per le miscele statistiche *i)*, *ii)* e *iii)* e verificare che $Tr(\rho^2) < 1$.
come è definito l'operatore densità? Come si calcola la matrice densità in una base data?

(d) Determinare la matrice densità ρ corrispondente allo stato (puro) $|a\rangle = (|+\rangle + i|-\rangle)/\sqrt{2}$, sempre nella base degli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$, e verificare che $Tr(\rho^2) = 1$ e $\rho^2 = \rho$.
come si distingue l'operatore densità nel caso di stato puro e in quello di miscela statistica?

(16) Dimostrare che data una funzione $f(x)$ tale per cui, nei punti $x = x_i$, $f(x_i) = 0$ e $f'(x_i) \neq 0$, allora

$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}}. \tag{9}$$

ricordare la definizione della funzione delta come integrale del prodotto fra delta e una funzione di prova?

(17) Sia $\mathcal{P}$ l'operatore (operatore parità) tale che

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle. \tag{10}$$

(a) L'operatore $\mathcal{P}$ è hermitiano?
quali sono gli elementi di matrice di $\mathcal{P}$ e di $\mathcal{P}^\dagger$ fra autostati della posizione?

(b) L'operatore $\mathcal{P}$ è unitario?
come agisce $\mathcal{P}^2$ su un autostato della posizione?

(c) Determinare autovalori ed autofunzioni di $\mathcal{P}$.
quali sono gli autovalori di un operatore idempotente?

(18) Si consideri un sistema invariante per dilatazioni, $q \to q' = \lambda q$:

(a) Determinare, mediante il teorema di Noether, la quantità classicamente conservata (detta viriale).
ricordare l'enunciato del teorema di Noether e il suo significato fisico.

(b) Determinare l'operatore Δ che genera le dilatazioni sugli stati quantistici $|q\rangle$: in particolare, dimostrare che esso coincide con l'operatore che si ottiene dalla carica di Noether classica sosituendo alla coordinata q ed all'impulso p gli operatori quantistici corrispondenti.
come agisce Δ per piccole dilatazioni nella rappresentazione delle coordinate?

(c) l'operatore Δ è hermitiano?
Come deve essere il generatore di una trasformazione unitaria?

(19) Calcolare il commutatore dell'operatore parità $\mathcal{P}$ con l'operatore impulso e con l'operatore $|\hat{p}|$ definito come

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar |k| |k\rangle\langle k| \tag{11}$$

e determinare gli elementi di matrice

(a) $\langle k|[\hat{p}, \mathcal{P}]|\psi\rangle$;

(b) $\langle q|[\hat{p}, \mathcal{P}]|\psi\rangle$;

(c) $\langle k|[|\hat{p}|, \mathcal{P}]|\psi\rangle$;

(d) $\langle q|[|\hat{p}|, \mathcal{P}]|\psi\rangle$,

dove $|k\rangle$ e $|q\rangle$ sono rispettivamente autostati dell'impulso e della posizione, e $|\psi\rangle$ è uno stato generico.
Riusciamo a scrivere il commutatore in termini di elementi di matrice di p negli stati dati, che conosciamo?

(20) Dimostrare che l'operatore $xpxp - i\hbar xp - \frac{1}{2}\hbar^2$ è hermitiano.
Come si calcola l'aggiunto di un prodotto di operatori?

(21) Considerare una coppia di funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ normalizzabili in senso proprio e aventi le proprietà

$$\psi_0(-x) = \psi_0(x) = \psi_0^*(x), \tag{12}$$

$$\psi_1(x) = N \frac{d}{dx} \psi_0(x), \tag{13}$$

dove N è una costante reale e positiva. Considerare infine la funzione d'onda

$$\psi_2(x) = c_0 \psi_0(x) + c_1 \psi_1(x), \tag{14}$$

con c_1 e c_2 costanti complesse tali che $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

(a) Dimostrare che gli stati aventi funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sono ortogonali.
Se le funzioni d'onda sono normalizzabili in senso proprio ed integriamo per parti, quanto valgono i termini di superficie?

(b) Dimostrare che se gli stati aventi funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sono normalizzati allora anche lo stato avente funzione d'onda $\psi_2(x)$ è normalizzato.
Che forma ha la condizione di normalizzazione per ψ_2?

(c) Calcolare i valori medi degli operatori posizione ed impulso negli stati aventi funzione d'onda $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$.
Nel calcolo dei valori medi della posizione, qual è la parità dell'integrando? Nel calcolo dei valori medi dell'impulso, che succede se si integra per parti?

(d) Dimostrare che

$$\langle\psi_0|[x^2,p^2]|\psi_o\rangle = 0. \tag{15}$$

Il commutatore è reale o immaginario? (usando le proprietà date).

(22) Data una soluzione dellequazione di Schrödinger,

(a) determinare una soluzione con il verso del tempo scambiato, ossia con $t \to -t$;
Che succede se si prende il complesso coniugato dell'intera equazione?

(b) determinare la relazione fra i valori medi di posizione ed impulso nella soluzione originale ed in quella così costruita;
Quanto vale il valor medio negli stati complessi coniugati?

(c) discutere se la trasformazione che lega queste due soluzioni sia unitaria.
Quanto vale il prodotto scalare tra due stati invertiti temporalmente?

(23) Si consideri un sistema a due livelli, la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = E_0\left(|+\rangle\langle+| + \sqrt{2}|+\rangle\langle-| + \sqrt{2}|-\rangle\langle+|\right). \tag{16}$$

(a) Se il sistema si trova inizialmente nello stato $|+\rangle$, con che probabilità si troverà nello stato $|-\rangle$ al tempo t?
Come evolve temporalmente uno stato generico?

(b) Determinare il periodo delle oscillazioni tra i due stati.
Dopo quanto tempo il sistema torna nello stato di partenza?

(24) Si consideri un sistama a due livelli, la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right). \tag{17}$$

Si definisca l'operatore hermitiano

$$A = \left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right). \tag{18}$$

Supponendo che il sistema al tempo $t = 0$ si trovi nell'autostato di A associato all'autovalore 1, determinare:

(a) la probabilità che al tempo t esso si trovi nell'autostato di A associato all'autovalore -1;

(b) il valor medio di A al tempo t;

(c) l'indeterminazione di A al tempo t.

Ricordare come si determina l'evoluzione temporale in rappresentazione di Schrödinger.

(25) Si consideri un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x \,. \tag{19}$$

(a) Si determini la dipendenza dal tempo degli operatori $x(t)$ e $p(t)$ in rappresentazione di Heisenberg.
Come si calcola l'evoluzione temporale di un operatore in rappresentazione di Heisenberg?

(b) Si supponga quindi che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato in cui la posizione ha una certa indeterminazione $\Delta^2 x$. Utilizzando il principio di indeterminazione la legge del moto appena trovata, si determini l'indeterminazione minima di una misura di posizione al tempo t.
Come sono legate le indeterminazioni di una misura di posizione a tempi diversi? Più in generale, noto il valor medio di un operatore al tempo t_0, come si determina il valor medio ad un tempo t.

(26) Determinare la dipendenza dal tempo dell'operatore viriale

$$G_D = \frac{1}{2}(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) \,, \tag{20}$$

per una hamiltoniana della forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q). \tag{21}$$

Sotto che condizione si ha $\frac{d}{dt}\langle\psi|G_D|\psi\rangle = 0$?
Ricordare come si determina l'evoluzione temporale in rappresentazione di Heisenberg.

(27) (a) Determinare le autofunzioni $\langle p|\psi_E\rangle$ della hamiltoniana Eq. (19) nella base degli impulsi.

Che forma assume l'equazione agli autovalori nella base degli impulsi?

(b) Sfruttare il risultato per determinare l'evoluzione temporale di uno stato qualunque nella base degli impulsi: supponendo che un sistema al tempo $t = 0$ si trovi in uno stato avente funzione d'onda

$$\langle p|\psi(t)\rangle\big|_{t=0} = \psi(p, 0), \tag{22}$$

determinare la funzione d'onda

$$\psi(p, t) \equiv \langle p|\psi(t)\rangle. \tag{23}$$

al tempo t in rappresentazione di Schrödinger.
Ricordare la soluzione delle leggi del moto alla Heisenberg.

(28) Determinare l'indeterminazione in posizione al tempo t per una particella libera che al tempo $t = 0$ è nello stato

$$\psi(x) = N \exp -\frac{x^2}{\beta - i\gamma} \tag{24}$$

e discutere se essa sia o meno una funzione monotona.
La funzione d'onda data corrisponde ad uno stato di minima indeterminazione per qualche valore del tempo t?

(29) Considerare una particella libera che al tempo $t = 0$ si trova in uno stato avente funzione d'onda corrispondente ad un pacchetto gaussiano di larghezza $\frac{1}{\lambda}$, con $\langle x\rangle = 0$ e $\langle k\rangle = k_0$

(a) Calcolare la densità di probabilità per misure di posizione al tempo $t = 0$ e dimostrare che nel limite $\lambda \to \infty$ essa tende ad una delta di Dirac localizzata nell'origine.
Ricordare la definizione della delta di Dirac

(b) Calcolare la funzione d'onda al tempo t.
Come si calcola la dipendenza temporale per uno stato generico?

(c) Quanto vale la densità di probabilità per misure di posizione per $t > 0$ nel limite $\lambda \to \infty$?
Ricordare la relazione fra l'indeterminazione al tenpo 0 e l'indeterminazione al tempo t.

(30) Considerare una particella libera che al tempo $t = 0$ si trova nello stato avente funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = N \left[e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2} + e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} \right], \tag{25}$$

con $|N|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{1+e^{-\alpha x_0^2}}$, correttamente normalizzato ad uno.

(a) Determinare la funzione d'onda al tempo $t = 0$ nella base degli impulsi.

(b) Determinare la funzione d'onda al tempo t.
Come si calcola la dipendenza temporale per uno stato generico?

(c) Determinare la la densità di probabilità per misure di posizione al tempo t e interpretarne fisicamente i vari termini.
Ricordare l'esperimento di Zeilinger!

(31) Una particella di massa m in una buca di potenziale infinita di semilarghezza a si trova in uno stato tale per cui una misura di energia può dare come risultato solo due valori: il più basso dello spettro e quello immediatamente superiore.

(a) Scrivere la funzione d'onda per questo stato, sapendo che la probabilità dei due risultati per la misura di energia è la stessa e che il valor medio dell'impulso vale $\langle p \rangle = \frac{2\hbar}{3a}$.
Qual è il valor medio dell'impulso in un autostato della buca di potenziale?

(b) Determinare il valor medio dell'impulso a tempi successivi

(c) Determinare l'intervallo di tempo t dopo il quale l'impulso ha valor medio nullo.
Come dipende dal tempo una sovrapposizione di autofunzioni di energia?

(32) Calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso $\Delta^2 x$ e $\Delta^2 p$ nell n-esimo autostato di energia di una buca di potenziale infinitamente profonda. Confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.

Calcolare esplicitamente i valori medi degli operatori x, x^2, p e p^2 risolvendo gli integrali con il metodo di integrazione per parti.

(33) Si consideri la hamiltoniana unidimensionale avente potenziale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa\, \delta(x), \tag{26}$$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac e κ è un coefficiente reale.

(a) In quale caso il sistema ammette stati legati (stati ad energia negativa)?
Trovare la condizione per il coefficiente κ.

(b) Nel caso in cui il sistema ammette stati legati, determinare il numero di stati, i relativi autovalori e autofunzioni, e la parità di quest'ultime.
Ricordando che $d\theta(x)/dx = \delta(x)$ determinare la soluzione quando $x \neq 0$ e usare il risultato per determinare la soluzione anche per $x = 0$, imponendo le opportune condizioni di normalizzazione per e autofunzioni.

(c) Determinare le autofunzioni nel caso di autostati di scattering (stati ad energia positiva).
Risolvere in modo analogo al punto precedente.

(d) Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione nel caso di un'onda piana proveniente da $x = -\infty$ e determinare il valore di energia per cui la probabilità di riflessione è pari a quella di trasmissione.
Ricordare la definizione dei coefficienti di riflessione R e trasmissione T e imporre $R = T$.

(34) Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - Ex, \tag{27}$$

dove E è una costante reale (oscillatore armonico immerso in un campo elettrico).

(a) Determinare lo spettro di energia.
Si riesce a riscrivere la hamiltoniana data nella forma di un potenziale armonico?

(b) Dimostrare che la base di autofunzioni della hamiltoniana data $|n\rangle$ e la base di autofunzioni $|n_0\rangle$ dell'oscillatore armonico standard (cioé con $E = 0$) sono unitariamente equivalenti, attraverso la trasformazione unitaria

$$U_\delta = e^{i\delta p} \tag{28}$$

dove p è l'operatore impulso, e determinare il valore della costante δ.
Che relazione c'è fra le due hamiltoniane? Ricordare la forma dell'operatore di traslazione.

(c) Calcolare il valor medio della posizione al tempo t per un sistema che evolve nel tempo secondo la hamiltoniana Eq. (27) ed al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|0_0\rangle$, cioè lo stato fondamentale dalla hamiltoniana quando $E = 0$.

Usare la rappresentazione di Heisenberg e sfruttare il risultato della domanda precedente.