PROBLEMI DI FISICA MODERNA E MECCANICA QUANTISTICA

SECONDA PARTE
anno accademico 2018-2019

(1) Per un sistema meccanico d-dimensionale determinare:

(a) gli elementi di matrice dell'operatore posizione $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$ tra autostati della posizione $|\vec{x}\rangle$;
qual è il generatore delle traslazioni in più di una dimensione?

(b) le autofunzioni dell'operatore impulso nella base degli autostati della posizione $\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle$;
le condizioni di autostato rispetto alle diverse componenti dell'impulso sono indipendenti?

(c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.
idem: il cambio di base tra autofunzioni della posizione e dell'impulso lungo ciascuna dimensione dipende dalle altre dimensioni?

(2) In uno spazio d-dimensionale:

(a) determinare il generatore delle traslazioni lungo una direzione $\hat{n}$, dove $\hat{n}$ è un qualunque versore (vettore di norma uno) nello spazio dato, ed esprimere il risultato in termini dell'operatore impulso d-dimensionale $\hat{\vec{p}}$;
Che differenza c'è fra questo caso e quello della domanda precedente?

(b) scrivere l'operatore che realizza una traslazione finita di lunghezza k lungo $\hat{n}$, prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base delle coordinate.
Che relazione c'è tra trasformazione finita ed infinitesima?

(3) (a) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$.
Si può fare la stessa manipolazione che nel caso classico?

(b) Discutere se il passaggio a coordinate baricentrali e relative sia l'unico che separa un problema centrale.
Quali condizioni deve soddisfare il cambio di coordinate?

(4) Considerare un sistema di due particelle di uguale massa m in una dimensione soggette al potenziale

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}m\omega^2\left(5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2\right), \tag{1}$$

dove x_1 e x_2 sono le coordinate delle due particelle.

(a) determinare il cambiamento lineare di coordinate che permette di separare il problema;
Che condizioni deve soddisfare il cambiamento di coordinate?

(b) determinare lo spettro di energia e la sua degenerazione.
Che relazione c'è tra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (1)?

(5) Considerare una sistema di due particelle unidimensionali, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \right) + \hbar\lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right) \tag{2}$$

dove a_i è un operatore che agisce sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{3}$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{4}$$

per ogni i, j.

(a) determinare la più generale trasformazione lineare degli operatori a_i che preserva le relazioni di commutazione;
Che condizione deve soddisfare la trasformazione?

(b) utlizzare il risultato del punto precedente per determinare lo spettro della hamiltoniana.
Che relazione c'è tra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (2)?

(6) Per un sistema di due corpi, con funzione d'onda $\langle \vec{x}_1 \vec{x}_2 | \psi \rangle = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, considerare l'operatore di parità $\mathcal{P}$ e l'operatore di scambio $\mathcal{S}$, definiti rispettivamente da $\langle \vec{x}_1 \vec{x}_2 | \mathcal{P} | \psi \rangle = \psi(-\vec{x}_1, -\vec{x}_2)$ e $\langle \vec{x}_1 \vec{x}_2 | \mathcal{S} | \psi \rangle = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$. Determinare l'azione degli operatori $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{S}$ esprimendo $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ in coordinate del baricentro e relativa, e scrivendo queste ultime in coordinate sferiche.
Che differenza c'è tra la parità e lo scambio?

(7) Esprimere la delta di Dirac d-dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x^1 - x_0^1)\delta(x^2 - x_0^2)\dots\delta(x^d - x_0^d)$ in coordinate ipersferiche, definite come

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi_1 \\ r\sin\phi_1\cos\phi_2 \\ \dots \\ r\sin\phi_1\sin\phi_2\dots\sin\phi_{d-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Come si trasforma la delta unidimensionale sotto un cambio di coordinate? E qualla d-dimensionale?

(8) Dimostrare che l'operatore impulso radiale p_r è hermitiano verificando che

$$(\langle \psi | p_r | \phi \rangle)^* = \langle \phi | p_r | \psi \rangle \tag{6}$$

attraverso il calcolo esplicito dell'elemento di matrice nella base delle coordinate ed in coordinate sferiche.
Qual è la forma della misura di integrazione in coordinate sferiche?

(9) Determinare la legge di evoluzione temporale (alla Heisenberg) per l'operatore momento angolare $\vec{L}$, in presenza di una hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$. Confrontare il risultato con il risultato classico.
Quanto vale il commutatore di $\vec{L}$ con H?

(10) Considerare gli autostati simultanei di L^2 e L_z. Determinare:

(a) i valori delle indeterminazioni $\Delta^2 L_x$ e $\Delta^2 L_y$ su tali autostati,
Come si scrivono gli operatori L_x e L_y in termini degli operatori $L_\pm$?

(b) quali, fra tali autostati, sono stati "di minima indeterminazione" ovvero minimizzano il valore del prodotto $\Delta L_x \Delta L_y$.
Come si scrivono gli operatori L_x^2 e L_y^2 in termini degli operatori $\vec{L}^2$ e L_z^2?

(11) Considerare la proiezione del momento angolare lungo un asse generico $\vec{n}$, $L_n = \vec{L} \cdot \vec{n}$ (dove $|\vec{n}| = 1$):

(a) dimostrare che su un qualunque stato $|lm\rangle$ tale per cui $l = 1$ vale la seguente relazione (identità di Hamilton-Cayley):

$$(L_n^3 - \hbar^2 L_n)|lm\rangle = 0 \tag{7}$$

Si scelga la base di autostati di L_n

(b) dimostrare che se $|\psi\rangle$ è un autostato di L_n allora il valor medio delle componenti di $\vec{L}$ nel piano ortogonale ad $\vec{n}$ è nullo.
Si consideri il caso in cui l'asse z è diretto lungo $\vec{n}$

(12) Considerare uno stato $|\phi\rangle$ tale che:

(a) $|\phi\rangle = |\vec{p}\rangle$ è un autostato dell'impulso e determinare il risultato di una misura del momento angolare lungo la direzione di $\vec{p}$;
Qual è la funzione d'onda del sistema?

(b) $\langle\vec{x}|\phi\rangle = \phi(|\vec{x}|)$ e mostrare che $|\phi\rangle$ è autostato di tutte le componenti del momento angolare,
Come agisce $\vec{L}$ su tale stato nella base delle coordinate? Perché questo non contraddice il fatto che gli operatori L_i sono incompatbili?

(c) $\langle\vec{x}|\phi\rangle = \vec{n} \cdot \vec{x}\, \phi(|\vec{x}|)$ e mostrare che $|\phi\rangle$ è autostato di $\vec{n} \cdot \vec{L}$ e di L^2.
Come agiscono $\vec{n} \cdot \vec{L}$ e di L^2 su tale stato nella base delle coordinate?

(13) (a) Determinare le matrici di S_x, S_y ed S_z per un sistema di spin uno nella base degli autostati di S_z, ossia gli elementi di matrice $\langle 1, m|S_i|1, m'\rangle$.
come si scrivono gli operatori S_x e S_y in termini degli operatori $LS\pm$?

(b) Determinare la trasformazione unitaria che realizza il cambiamento da questa base a quella (discussa a lezione) in cui gli elementi di matrice di S_i valgono $\langle j|S_i|k\rangle = -i\hbar\epsilon^{ijk}$.
come si scrive la matrice di cambiamento di base note le due basi?

(14) Determinare la probabilità che una particella di spin 1 avente $s_z = +1$ sia rivelata con spin pari a ± 1 lungo un asse $\vec{n}$ generico.
utilizzare la base degli autostati di S e S_z.

(15) Considerare l'elemento di matrice dell'operatore di spin $\vec{s}$ in uno stato $|\psi\rangle$ per una particella di spin $\frac{1}{2}$

$$\vec{s}_\psi \equiv \langle\psi|\vec{s}|\psi\rangle. \tag{8}$$

Dimostrare che se si agisce su $|\psi\rangle$ con una rotazione R attorno ad un asse qualunque $|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = R|\psi\rangle$ l'elemento di matrice $\vec{s}_{\psi'}$ si ottiene da $\vec{s}_\psi$ eseguendo una rotazione dello stesso angolo attorno allo stesso asse.
data una trasformazione unitaria che agisce sui ket, qual è la corrispondente trasformazione unitaria sugli operatori?

(16) Considerare un sistema di spin uno, supporre che la sua evoluzione temporale sia data dall'hamiltoniana

$$H = \vec{B} \cdot \vec{S} \tag{9}$$

dove $\vec{B}$ è un vettore fisso esterno a componenti reali, e $\vec{S}$ è l'operatore spin.

(a) Determinare e risolvere la legge del moto per gli stati fisici in rappresentazione di Schroedinger.
si scelga la base opportuna di autostati dello spin.

(b) Utilizzare la soluzione per determinare la probabilità che una misura di momento angolare eseguita al tempo T su di una particella che si trova nello stato di $m = +1$ al tempo $t = 0$ dia come risultato $m = -1$.
calcolare il prodotto scalare fra gli autostati opportuni considerando l'evoluzione temporale degli stati.

(c) Ripetere tutta la trattazione utilizzando la rappresentazione di Heisenberg per l'evoluzione temporale.
risolvere l'equazione di Heisenberg e utilizzare la base degli autostati dello spin.

(17) Considerare un sistema la cui dinamica è data dalla stessa hamiltoniana di quella del problema precedente, ma nel caso di spin $\frac{1}{2}$.

(a) Determinare la dipendenza dal tempo del valor medio di ciascuna delle componenti dello spin in uno stato qualunque $|\psi\rangle$, $\langle\psi|\vec{s}|\psi\rangle$, sia alla Schroedinger che alla Heisenberg.
si scelga la base opportuna di autostati dello spin.

(b) Determinare in particolare la probabilità che un sistema che al tempo $t = 0$ sia preparato nello stato $|+\rangle$ al tempo t generico sia rivelato stato $|+\rangle$.
si consideri per semplicità che $\vec{B}$ sia diretto lungo l'asse x.

(18) Considerare un stato $|\psi\rangle$ al tempo $t = 0$ tale che

$$L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle \tag{10}$$

$$\frac{L_x + L_y}{\sqrt{2}}|\psi\rangle = |\psi\rangle\,. \tag{11}$$

(a) Determinare $|\psi\rangle$.
esprimere $|\psi\rangle$ nella base degli autostati di L^2 e L_z.

(b) Sia $H = \alpha L^2 + \beta L_z$, con α e β parametri reali. Determinare, al tempo t generico, $|\psi, t\rangle$ e $\langle L_i\rangle_t$.
utilizzare lo schema di evoluzione alla Heisenberg.

(19) Considerare un operatore $\vec{v}$ che soddisfa le relazioni

$$[L_i, v_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}v_k\,. \tag{12}$$

(a) Dimostrare che l'operatore

$$v_i' = e^{-i\phi L_x/\hbar}v_i e^{i\phi L_x/\hbar}$$

è l'operatore v_i ruotato di un angolo ϕ attorno all'asse x.
usare la formula di BCH o in alternativa differenziare rispetto a ϕ e risolvere le equazioni ottenute.

(b) Dimostrare che

$$e^{i\pi L_x/\hbar}|l, m\rangle = |l, -m\rangle. \tag{13}$$

come agisce l'operatore $e^{i\pi L_x/\hbar}$ su L_z?

(c) Mostrare che l'operatore $e^{i\pi/2L_x/\hbar}e^{-i\pi L_y/\hbar}e^{-i\pi/2L_x/\hbar}$ può essere scritto come l'operatore di rotazione attorno all'asse z di un angolo ϕ. Determinare ϕ.
come agisce l'operatore $e^{i\phi/2L_x/\hbar}$ su L_y?

(20) Determinare i coefficienti di Clebsch-Gordan per la composizione di due spin 1.

(21) Sia dato un sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ che interagiscono attraverso la hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1 \vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{14}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare relativo del sistema di due particelle.

(a) Separare completamente il problema;

(b) supponendo noto e non-degenere lo spettro dell'hamiltoniana radiale, determinare determinino lo spettro di H e la sua degenerazione.

(22) Considerare la funzione d'onda

$$\psi_\ell(\vec{x}) = d_{ij\ldots k} x_i x_j \ldots x_k \tag{15}$$

dove $d_{ij\ldots k}$ è completamente simmetrica sotto lo scambio di qualunque coppia di indici, e tale che la traccia su qualunque coppia di indici i, j si annulli, ossia tale che

$$\sum_{i=1}^{3} d_{i_1 \ldots i \ldots i \ldots i_\ell} = 0 \tag{16}$$

per ogni possibile scelta di indici sommati.

(a) Determinare l'azione degli operatori $\vec{p}^2$ e p_r^2 (quadrato dell'impulso totale e dell'impulso radiale) sulla funzione d'onda data;
Come agiscono gli impulsi totale e radiale visti come operatori differenziali?

(b) utilizzare il risultato per dimostrare che la funzione d'onda data è un'autofunzione del momento angolare orbitale totale

$$L^2 \psi_\ell(\vec{x}) = \hbar^2 \ell(\ell + 1)\psi_\ell(\vec{x}), \tag{17}$$

Che relazione c'e' fra quadrato dell'impulso totale, radiale, e momento angolare? dove ℓ è il numero di indici di $d_{ij\ldots k}$.;

(c) discutere la relazione tra l'autovalore trovato e le regole di composizione dei momenti angolari.
Qual è il massimo valore del momento angolare se si combinano ℓ stati di momento angolare uno?

(23) Considerare un sistema di una particella soggetta ad un potenziale centrale $V(r)$ in un sistema di riferimento rotante con velocita ω intorno ad un asse qualunque.

(a) Determinare la Hamiltoniana e le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg;
Che relazione c'è fra le leggi del moto nei due sistemi?

(b) specificare un insieme di operatori commutanti con l'hamiltoniana i cui autovalori determinano completamente lo stato del sistema;
Come si trasforma sotto rotazioni il termine che mette in relazione le due hamiltoniane?

(c) determinare la degenerazione degli autostati di energia.
Come per punto precedente

(24) Considerare un oscillatore armonico *bidimensionale* isotropo avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^2, \tag{18}$$

con operatori di distruzione $a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x_i + i\frac{p_i}{m\omega}\right)$. Definire gli operatori

$$j_a \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{19}$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j.

(a) Determinare le relazioni di commutazione degli operatori j^a fra di loro e con l'hamiltoniana.
Che relazione c'e' fra i commutatori di a e $a^\dagger$ e quelli degli operatori dati?

(b) Esprimere l'operatore $j_1^2 + j_2^2 + j_3^2$ in termini dell'hamiltoniana e utilizzare il risultato per determinare lo spettro dell'hamiltoniana e la sua degenerazione.
Che relazione c'e' fra la hamiltoniana ed il "momento angolare totale" j^2

(c) Confrontare lo spettro e la sua degenerazione risultato che si ottiene separando il problema in coordinate cartesiane.
Uno degli operatori j_i è il momento angolare nel piano?

(d) Riesaminare utilizzando questo formalismo il problema n. (5).
Che forma ha in termini di j_i il contributo proporzionale a λ?

(25) (a) Per un oscillatore armonico tridimensionale, dimostrare che in un autostato di energia i valori medi di energia cinetica e potenziale sono uguali $\langle T\rangle = \langle V\rangle$, confrontando la dipendenza dai parametri m ed ω dell'autovalore di energia e dell'hamiltoniana.
Come dipende dai parametri l'autovalore?

(b) Utilizzare il risultato per calcolare il prodotto dell'indeterminazione di $|\vec{x}|^2$ and $|\vec{p}|^2$ in un autostato di energia e confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.
Che relazione c'è fra T, V e le indeterminazioni richieste?

(26) Considerare una particella di massa μ soggetta ad un potenziale centrale della forma

$$V(r) = \lambda^2 r^\alpha.$$

(a) Determinare la dipendenza degli autovalori di energia dai parametri fisici μ, λ e α. Che cosa succede se $\alpha < -2$?
Utilizzare considerazioni dimensionali.

(b) Dimostrare che in un autostato di energia $\langle T\rangle$ e $\langle V\rangle$ sono proporzionali, e determinare il coefficiente di proporzionalità.
Sfruttare l'indipendenza dal tempo degli elementi di matrice di qualunque operatore in uno stato stazionario, ed applicarla all'operatore viriale $\vec{x} \cdot \vec{p}$.

(27) (a) Determinare il valor medio di r^k nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, con k intero. Utilizzare il risultato per determinare in questo stato il valor medio della posizione radiale, la sua varianza, ed il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica.

(b) Determinare la posizione del massimo della densità di probabilità radiale $\rho(r)$ nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Confrontare il risultato con il raggio dell'orbita nel modello di Bohr.
Qual è l'autofunzione dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno? Come si calcola il valor medio di un operatore nella in rappresentazione di Schroedinger?

(28) Considerare una particella soggetta all'hamiltoniana

$$H = H_0 - \omega L_z \, ,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno e $\omega = \frac{eB}{2mc}$ è un accoppiamento con un campo magnetico di intensità B diretto lungo l'asse z. Al tempo $t = 0$ la particella si trova nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle)$, dove $|nlm\rangle$ indica un'autofunzione idrogenoide.

(a) Determinare la probabilità di trovare il sistema al tempo t negli stati $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle)$; $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,1\,{-1}\rangle + |211\rangle)$; oppure $|\phi_3\rangle = |210\rangle$. Qual è l'interpretazione fisica di questi stati?.
Usare la rappresentazione di Schroedinger.

(b) Determinare il valor medio dell'operatore momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = \frac{e}{3mc}\vec{L}$ ad ogni tempo t.
Usare la rappresentazione di Heisenberg.

(29) Dimostrare le seguenti proprietà del propagatore $K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t)$

(a)
$$K^*(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t; \vec{x}', t');$$

(b) se il sistema è invariante per traslazioni allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}' - \vec{x}; t', t);$$

(c) se le autofunzioni della hamiltoniana sono reali allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(\vec{x}, t'; \vec{x}', t);$$

(d) se le autofunzioni della hamiltoniana sono autostati della parità allora

$$K(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) = K(-\vec{x}', t'; -\vec{x}, t).$$

Esprimere il propagatore in termini dell'operatore di evoluzione temporale e sfruttarne le proprietà.

(30) Determinare la azione classica in termini delle condizioni iniziali e finali per una particella libera unidimensionale. Determinare quindi l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione temporale (propagatore)

$$K(q', t'; q, t) = \langle q', t' | e^{\frac{1}{i\hbar} H(t'-t)} | q', t' \rangle$$

e dimostrare che esso, a meno della normalizzazione, coincide con l'esponenziale di $i/\hbar$ volte l'azione classica. Determinare il risultato nel limite $t' \to t$.
Inserire una risoluzione dell'identità rispetto agli autostati dell impulso sia sullo stato iniziale che su quello finale.

(31) Considerare una particella che si muove in un campo elettrico costante $\vec{E}$.

(a) Determinare il potenziale corrispondente al problema dato e scrivere il propagatore nello spazio degli impulsi $K(\vec{p}_f, t_f; \vec{p}_i, t_i)$ che esprime l'ampiezza di trovare la particella in un autostato dell'impulso $\vec{p}_f$ al tempo t_f se essa è preparata in un autostato dell'impulso $\vec{p}_i$ al tempo t_i .
Che relazione c'e' tra forza e potenziale? Come è definito il propagatore?

(b) Calcolare il commutatore dell'operatore impulso $\vec{p}$ con l'operatore di evoluzione temporale ed esprimere il risultato in termini di operatori impulso alla Heisenberg.
Come si scrive l'impulso alla Heisnberg usando l'operatore di evoluzione temporale?

(c) Risolvere le equazioni del moto alla Heisenberg per l'operatore impulso e sosituire il risultato nell'espressione trovata nella domanda precedente.

(d) Calcolare l'elemento di matrice della relazione trovata alla domanda precedente fra autostati dell'impulso, ed utilizzare il risultato per dimostrare che il propagatore calcolato al punto (a) si annulla se $\vec{p}_f \neq \vec{p}_i + \vec{E}t$.
Ricordare la definizione del propagatore

(32) Considerare una particella che si muove in un campo elettrico costante

$$\vec{E} = \begin{cases} \mathcal{E}\hat{x} & x > a \text{ per ogni } y, z \\ 0 & -a < x < a \\ -\mathcal{E}\hat{x} & x > a \text{ per ogni } y, z \end{cases} \tag{20}$$

dove $\hat{x}$ è un vettore di norma uno diretto lungo l'asse x.

(a) Determinare il potenziale corrispondente al problema dato e scrivere l'equazione agli autovalori per la Hamiltoniana.

(b) Separare il problema agli autovalori e ridurlo ad un problema unidimensionale.
In che direzione agisce la forza?

(c) Scrivere la soluzione semiclassica nelle tre regioni date.
Come sono fatte le condizioni di raccordo?

(d) Determinare lo spettro di energia in approssimazione WKB.
Ricordare l'idea del metodo: imporre che la soluzione nella regione centrale sia la stessa se raccordata da sinistra o da destra.

(33) Considerare un sistema tridimensionale soggetto ad un potenziale idrogenoide schermato

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & 0 < r < R \\ -\frac{e^2}{r}e^{-\lambda(r-R)} & r > R \end{cases} \tag{21}$$

(a) Calcolare la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale.
Qual è la differenza tra la hamiltoniana data e qualla idrogenoide imperturbata?

(b) Discutere gli andamenti della soluzione trovata quando $\lambda \to 0$ e quando $R \to \infty$.
Che cosa diventa il potenziale nei due limiti dati?

(34) La carica del nucleo di un atomo idrogenoide aumenta di una unità in seguito ad un decadimento β.

(a) Determinare la variazione di energia dell'elettrone nell'n-esimo stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni, utilizzando il risultato del problema 26 al punto (b).
Ricordare il teorema del viriale

(b) Determinare esattamente la differenza di energia tra il lvello n-esimo di energia per due atomi idrogenoidi per cui la carica del nucleo differisce di una unità e confrontare con il risultato trovato al punto precedente.
Quando è buona l'approssimazione perturbativa, e perché?

(35) Considerare una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad potenziale armonico isotropo, perturbata da un campo elettrico diretto lungo l'asse z.

(a) Dimostrare che gli elementi di matrice del potenziale perturbante soddisfano

$$\langle nlm|\hat{z}|000\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\delta_{n1}\delta_{l1}\delta_{m0}, \tag{22}$$

dove $|nlm\rangle$ sono autofunzione di energia e di momento angolare con $E_{nl} = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right)$, e $\hat{z}$ è l'operatore posizione lungo l'asse z, esprimendo l'operatore $\hat{z}$ in termini di operatori di creazione e distruzione per l'oscillatore armonico unidimensionale, e le autofunzioni dell'oscillatore armonico in coordinate cartesiane in termini di quelle in coordinate sferiche.
Che valore del momento angolare porta $\hat{z}$ (ricordare il problema 12 puntoc)

(b) Determinare la perturbazione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine pertubativo.
Quanto vale la perturbazione al primo ordine?

(36) Considerare un oscillatore armonico bidimensionale con potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + \lambda xy. \tag{23}$$

(a) Trattando il termine proporzionale a λ come una perturbazione, determinare la correzione ai primi due livelli eccitati al primo ordine in λ.
Diagonalizzare la matrice della perturbazione.

(b) Determinare la degenerazione degli stati perturbati.
A che cosa è dovuta la degenerazione in assenza di perturbazione?

(c) Determinare lo spettro esattamente e discutere per quali valori del parametro λ l'approssimazione perturbativa è buona.
Ricordare i problemi 4-5

(37) Considerare una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad potenziale armonico isotropo, perturbata a partire dal tempo $t = 0$ da un campo elettrico diretto lungo l'asse z oscillante e smorzato:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0\Theta(t)\cos\omega t e^{-t/\tau}, \tag{24}$$

dove ω e τ sono costanti reali positive e $\vec{E}_0$ è un vettore costante.

(a) Scrivere l'espressione dell'ampiezza di transizione dallo stato fondamentale in uno stato eccitato qualunque al primo ordine della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo.

(b) Dimostrare che solo una transizione può avvenire e determinarne la probabilità per $t \gg \tau$.
Ricordare il problema 35 punto a.

(38) Determinare la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born:

(a) per la diffusione da potenziale di Yukawa

$$V(r) = \frac{V_0}{r}e^{-\frac{r}{\lambda}}, \tag{25}$$

ed esprimere il risultato in termini dell'energia E della particella incidente e dell'angolo di *scattering* θ tra le direzioni della particella entrante e di quella uscente.
Esprimere in termini di E e θ il modulo dell'impulso trasferito $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$.

(b) per la diffusione da potenziale coulombiano

$$V(r) = e^2\frac{1}{r} \tag{26}$$

e discutere la dipendenza della sezione d'urto da E e da θ.
In quale limite il potenziale di Yukawa si riduce a quello coulombiano?

(39) Si consideri un sistema di due particelle identiche in una dimensione, con hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + B \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \,, \tag{27}$$

dove $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin delle due particelle e B ed ω sono costanti reali positive.

(a) Nel caso di fermioni di spin $\frac{1}{2}$, si determinino la funzione d'onda completa (spaziale e di spin) per lo stato fondamentale ed il primo livello eccitato del sistema, ed i corrispondenti autovalori di energia e spin, a seconda dei valori dei parametri B ed ω.
Esprimere l'hamiltoniana in termini di un oppurtuno insieme di operatori che commutano.

(b) Rispondere alle domande del punto precedente considerando ora il caso di due bosoni di spin 1.
Quali sono le proprietà di simmetria della funzione d'onda per scambio di particelle identiche nel caso di bosoni e fermioni?

(40) Considerare un atomo di elio, formato da due elettroni identici di massa m e spin $\frac{1}{2}$ che si muovono nel potenziale di un nucleo. Detti $\vec{x}_1$, $\vec{p}_1$, $\vec{x}_2$ e $\vec{p}_2$ gli operatori posizione ed impulso dei due elettroni, ed e una costante reale (carica dell'elettrone), l'hamiltoniana è

$$H = H_0 + H_{12} \tag{28}$$

$$H_0 = \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_1|} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_2|}, \tag{29}$$

$$H_{12} = \frac{2e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \tag{30}$$

Determinare funzione d'onda, energia e degenerazione per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato del sistema.
Esprimere l'hamiltoniana in termini delle coordinate del centro di massa e relativa. Considerare le proprietà di simmetria della funzione d'onda per scambio di fermioni identici.