PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

PRIMA PARTE
anno accademico 2019-2020

(1) Si consideri una oggetto quantistico che può passare attraverso uno schermo trasparente, diviso in tre zone, indicate dai tre ket $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, e si supponga che essa si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle. \tag{1}$$

Si supponga inoltre che lo schermo possa essere equipaggiato di rivelatori che indicano se l'oggetto è passato attraverso ciascuna delle tre zone.

(a) Qual è la probabilità che l'oggetto venga rivelato in ciascuna delle tre zone dello schermo?
come si calcola la probabilità dei risultati di una misura

(b) Qual è la probabilità che l'oggetto *non* venga rivelato nella zona 3 dello schermo?
come si calcola la probabilità che un evento non accada?

(c) Se solo il rivelatore per la zona 3 è attivato, ed esso rivela che l'oggetto non è passato dalla zona 3 (ma si ha la certezza che esso sia passato attraverso lo schermo) in che stato si trova l'oggetto?
in che stato si trova un sistema dopo la misura? Spiegare la misura come proiezione

(2) Si supponga ora che l'oggetto della domanda precedente possa arrivare sullo schermo passando da due fenditure, A e B. Se passa dalla fenditura A, si trova nello stato Eq. (1), ma se invece passa dalla fenditura B si trova nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{i}{2}|1\rangle - \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle. \tag{2}$$

Nel caso della domanda precedente solo la fenditura A era aperta.

(a) Se invece è aperta la fenditura B la risposta a ciascuna delle domande del punto precedente come cambia, e perché?
Da che cosa dipendono le probabilità? E gli stati?

(b) Se sono aperte entrambe le fenditure, in che stato si trova il sistema?
Che cosa dice il principio di sovrapposizione?

(c) Se la fase dello stato $\phi\rangle$ cambia per un fattore i, cambia il risultato della risposta alle due domande precedenti, e se sì come?
Quando è misurabile una fase?

(3) Si supponga di essere nella situazione delle due domande precedenti, nel caso in cui l'oggetto non viene rivelato nella zona 3 dello schermo.

(a) È possibile distinguere a posteriori, con una misura opportuna, il caso in cui l'oggetto è passato da A, e quello in cui è passato da B (ma in entrambi i casi non viene rivelato in 3)?
Gli stati dati sono ortogonali?

(b) Se oltre che non essere rivelato nella zona 3, lo stato *viene* rilevato nella zona 1, la risposta alla domanda precedente cambia?
Gli stati in esame hanno una sovrapposizione non-nulla con lo stato $|1\rangle$?

(c) Se so che il sistema non si trova in nessuno dei due stati corrispondenti ai due casi considerati al punto (a), posso dire in che stato si trova? E se sì, qual è?
Gli stati dati formano una base?

(4) Nella situazione della domanda 3, punto (iii), considerare un'osservabile che prende il valore $+2$ quando l'oggetto è passato dalla fenditura A, 0 quando è passato dalla fenditura B e -2 quando non è passato né dalla fenditura A né dalla fenditura B.

(a) Scrivere la matrice dell'operatore A nella base degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$.
come è definita la matrice associata ad un operatore?

(b) Scrivere l'aggiunta della matrice A.
come è definita la matrice aggiunta?

(5) Siano A e B operatori hermitiani e sia $C = A\,B$.

(a) Determinare l'operatore $C^\dagger$ in termini di A e B.
come agisce C?

(b) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = C^\dagger$?
Che forma hanno C e $C^\dagger$ in termini di A e B?

(c) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = -C^\dagger$?
Che forma hanno C e $C^\dagger$ in termini di A e B?

(d) Dimostrare che C può sempre essere scritto come somma di un operatore hermitiano e di un operatore anti-hermitiano e scrivere l'espressione esplicita della parte hermitiana e della parte antihermitiana di C in termini di A e B. $C = -C^\dagger$.
Posso sempre scrivere C come somma di termini aventi la forma di quelli considerati ai punti precedenti?

(6) Sia A l'operatore associato ad una generica osservabile.

(a) È vero che se si effettua una misura dell'osservabile A su di un sistema nello stato $|\alpha\rangle$, il sistema dopo la misura si trova nello stato $|\beta\rangle = A|\alpha\rangle$?
(Es. 4.4 Picasso) quali sono i possibili risultati di una misura e in che stato si trova il sistema dopo la misura?

(b) Rispondere alla domanda precedente nel caso in cui $|\alpha\rangle$ è un autostato dell'operatore A.
supporre 0 sia un autovalore di A: il vettore nullo corrisponde ad un sistema fisico?

(7) Considerare la situazione del problema (3), punto (a): siano detti $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ i due stati in cui si trova il sistema quando l'oggetto è rispettivamente passato da A o da B. Costruire gli operatori seguenti, scrivendone la matrice 3×3 nella base degli stati $|1\rangle$, $|2\rangle, |3\rangle$.

(a) l'operatore A, associato ad un'osservabile che dà come risultati della misura $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\alpha\rangle$, 0 quando esso si trova nello stato $|\beta\rangle$ e -1 quando esso non si trova né nello stato $|\alpha\rangle$, né nello stato $|\beta\rangle$;

(b) l'operatore B, associato all'osservabile che dà $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\alpha\rangle$ (come prima), ma -1 in tutti gli altri casi;

(c) l'operatore C, associato all'osservabile che dà $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\alpha\rangle$ (come prima), 0, quando si trova nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta\rangle + |\gamma\rangle)$ e , -1, quando si trova nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta\rangle - |\gamma\rangle)$, dove $|\gamma\rangle$ è lo stato in cui il sistema si trova quando non è né nello stato $|\alpha\rangle$, né nello stato $|\beta\rangle$;

(d) l'operatore di proiezione Π che corrisponde alla situazione iniziale della domanda (3) (ossia: l'oggetto non viene rivelato nella zona 3 dello schermo). Questo operatore è associato ad un'osservabile, e se sì, quale?

In tutti i casi: come si scrive l'operatore associato ad un'osservabile in notazione di Dirac? Come si passa dalla notazione di Dirac alla forma matriciale? Per il caso (d): l'operatore di proiezione ` hermitiano?

(8) Determinare, per tutte le coppie di operatori A, B, C e Π del problema precedente se siano compatibili o meno.
Formalmente: qual è la condizione di compatibilità? Fisicamente: che cosa significa?

(9) Considerare gli operatori A, B e Π del problema (7). Se il sistema si trova in un autostato di A,

(a) che risultato producono una misura prima di A e poi di B, oppure prima di B e poi di A?
A e B sono compatibili? In che stato si trova il sistema dopo la misura di un'osservabile?

(b) che risultato producono una misura prima di A e poi di Π, oppure prima di Π e poi di A?

(c) che risultato producono una misura prima di B e poi di Π, oppure prima di Π e poi di B?
A o rispettivamente B e Π sono compatibili? La misura di Π determina l'autostato di A o rispettivamente di B e viceversa?.

(10) Considerare gli operatori A e C del problema (7).

(a) Determinare la relazione di indeterminazione per questa coppia di operatori.
Qual è la forma della relazione di indeterminazione?

(b) Determinare il o gli stati di minima indeterminazione, ossia gli stati per i quali la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza.
A quali condizioni la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza?

(11) Considerare un insieme di molti oggetti, ciascuno dei quali che può trovarsi in uno dei due stati $|+\rangle$ o $|-\rangle$: ad esempio, un insieme di fotoni, ciascuno dei quali può trovarsi in uno di due stati di polarizzazione. Considerare le seguenti miscele statistiche di N stati ("N fotoni") ($N \gg 1$):

i) $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|+\rangle$ e $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|-\rangle$;

ii) $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|\phi_1\rangle = \cos\theta|1\rangle + \sin\theta e^{i\phi}|2\rangle$ e $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|\phi_2\rangle = -\sin\theta|1\rangle + \cos\theta e^{i\phi}|2\rangle$, dove $|1\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ e $|2\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$;

iii) $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|\chi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + i\sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$ e $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|\chi_2\rangle = i\sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$,

iv) $\frac{3}{4}N$ fotoni nello stato $|+\rangle$ e $\frac{1}{4}N$ fotoni nello stato $|-\rangle$,

v) tutti i fotoni nello stato $|\chi_1\rangle$.

(a) Calcolare in tutti i casi le probabilità di trovare i fotoni nello stato $|+\rangle$.
come si calcola la probabilità di una misura per una miscela statistica?

(b) È possibile, attraverso la misura anche ripetuta di qualunque osservabile in questo spazio, distinguere le miscele statistiche *i)* e *ii)*?
qual è la probabilità di trovare uno stato con polarizzazione generica in una delle due miscele?

(c) Determinare in tuttti i casi la matrice densità ρ, nella base degli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ e verificare se $Tr(\rho^2) = 1$ o meno.
come è definito l'operatore densità? Come si calcola la matrice densità in una base data?

(d) È possibile, attraverso la misura anche ripetuta di qualunque osservabile in questo spazio, distinguere i casi *iii)*, *iv)* e *v)*?
Qual è la più generale misura che si può eseguire su uno stato?

(12) Calcolare l'integrale

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda y^2 - x) f(y) dy, \tag{3}$$

dove λ è una costante (a) reale positiva oppure (b) complessa.
Ricordare la definizione della distribuzione delta di Dirac come integrale del prodotto fra delta e una funzione di prova

(13) Considerare le seguenti trasformazioni:

- *Dilatazioni*: $q \to q' = \lambda q$;
- *Trasformazioni di Galileo*: $q \to \tilde{q} = q - vt; \qquad \tilde{p} = p - mv$.

(a) Nel caso delle dilatazioni, determinare l'operatore impulso p'. Verificare quindi in entrambi i casi che le coordinate ed impulsi trasformati soddisfano le relazioni di commutazione canoniche.
Qual è il generatore delle traslazioni sulle coordinate trasformate? È unico?.

(b) Determinare in entrambi i casi il generatore della trasformazione infinitesima e verificare che è hermitiano.
Ricordare la definizione di aggiunto di un operatore.

(c) Determinare in entrambi i casi la trasformazione finita.
Come si definisce l'esponenziale di un operatore?

(14) Considerare l'operatore $O = \hat{x}^n \hat{p}$ dove $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sono gli operatori posizione e impulso ed n è intero positivo.

(a) Dimostrare che O non è hermitiano e calcolare la differenza $D = O - O^\dagger$.
Come si calcola l'aggiunto di un prodotto di operatori? Si può esprimere D in termini di un commutatore noto?

(b) Calcolare esplicitamente l'elemento di matrice $\langle\psi|O^\dagger|\phi\rangle$ nella base delle coordinate in termini delle funzioni d'onda $\langle x|\phi\rangle = \psi(x)$ $\langle x|\phi\rangle = \phi(x)$, usando la definizione di aggiunto di un operatore. Verificare che coincide con l'elemento di matrice dell'operatore $O + D$, dove D è stato determinato al punto precedente.
Su che cosa agisce l'operatore $\hat{p}$ quando si calcola l'elemento di matrice di O? E l'elemento di matrice di $O^\dagger$?

(c) Ripetere il calcolo al punto precedente ma ora usando la base degli impulsi.
Che forma ha l'operatore posizione nella base degli impulsi?

(15) Sia $\mathcal{P}$ l'operatore (operatore parità) tale che

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle. \tag{4}$$

Calcolare il commutatore dell'operatore parità $\mathcal{P}$ con l'operatore impulso e con l'operatore $|\hat{p}|$ definito come

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar|k||k\rangle\langle k| \tag{5}$$

e determinare gli elementi di matrice

(a) $\langle k|\,[\hat{p}, \mathcal{P}]\,|\psi\rangle$;

(b) $\langle q|\,[\hat{p}, \mathcal{P}]\,|\psi\rangle$;

(c) $\langle k|\,[|\hat{p}|\,, \mathcal{P}]\,|\psi\rangle$;

(d) $\langle q| \left[|\hat{p}| \, , \mathcal{P} \right] |\psi\rangle$,

dove $|k\rangle$ e $|q\rangle$ sono rispettivamente autostati dell'impulso e della posizione, e $|\psi\rangle$ è uno stato generico.
Riusciamo a scrivere il commutatore in termini di elementi di matrice di p negli stati dati, che conosciamo?

(16) Considerare un sistema a due livelli, la cui evoluzione temporale può essere data da una Hamiltoniana i cui elementi di matrice sono

$$H_1 = E_0 \sigma_1, \tag{6}$$

(indipendente dal tempo) oppure dalla hamiltoniana dipendente dal tempo

$$H_2(t) = E_0 t \sigma_1, \tag{7}$$

dove E_0 è una costante reale positiva e σ_1 è una matrice di Pauli.

(a) Determinare esplicitamente l'operatore di evoluzione temporale in entrambi i casi.
Qual è l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale per hamiltoniane che a tempi diversi commutano?

(b) Nel caso dela hamiltoniana H_1, se al tempo $t = 0$ il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $A = \sigma_3$, qual è la probabilità che al tempo t esso si trovi nell'altro autostato dello stesso operatore?
Qual è la relazione fra la probabilità richiesta e gli elementi di matrice dell'operatore di evoluzione temporale?

(c) Rispondere di nuovo alla domanda precedente, ma nel caso in cui il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $B = \sigma_2$.
Il risultato è diverso o uguale a quello del caso precedente?

(d) Rispondere di nuovo alla domanda precedente, ma nel caso in cui il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $C = \sigma_1$.
Che cosa succede se il sistema si trova in un autostato della hamiltoniana ?

(e) Utilizzare la risposta alla domanda precedente per calcolare nuovamente la probabilità del punto (b) ma *senza* usare l'espressione esplicita dell'operatore di evoluzione temporale.
Che forma ha lo stato in cui è stato preparato il sistema nella base degli autistati della hamiltoniana?

(17) (a) Dimostrare che in un autostato della hamiltoniana

$$\langle [A, H] \rangle = 0 \tag{8}$$

per qualunque operatore A.
Quanto vale l'elemento di matrice di H in un suo autostato?

(b) Determinare, per uno stato generico, e per una hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}), \tag{9}$$

la dipendenza temporale del valor medio di $\hat{v}$, $\frac{d}{dt}\langle \hat{v} \rangle$, dove $\hat{v}$ è l'operatore viriale

$$\hat{v} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p} \right). \tag{10}$$

Come si calcola la dipendenza dal tempo di un elemento di matrice in termini della dipendenza dal tempo degli stati?

(c) Utilizzare i risultati delle domande precedenti per dimostrare che, per un potenziale della forma

$$V(\hat{q}) = \hat{q}^{\alpha}, \tag{11}$$

i valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in un autostato di energia sono proporzionali, e determinare il coefficiente di proporzionalità (*teorema del viriale*).
Come depende dal tempo il valor medio di $\hat{v}$?

(d) Determinare ora la dipendenza dal tempo in rappresentazione di Heisenberg dell'operatore $\hat{v}$ e confrontare con il risultato al punto (b).
Che forma hanno le equazioni del moto di Heisenberg?

(e) Determinare la condizione generale per cui si conservano gli autovalori di $\hat{v}$, e la simmetria associata a questa legge di conservazione.
Qual è la traformazione generata da $\hat{v}$? Ricordare il problema 13.

(18) Considerare la hamiltoniana che descrive il moto di una particella soggetta ad una forza costante (potenziale lineare)

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \kappa \hat{x}. \tag{12}$$

(a) Discutere quali fra i seguenti operatori possano essere diagonalizzati simultaneamente: H, $\hat{x}$, $\hat{p}$, T, V, dove T e V sono rispettivamente gli operatori energia cinetica ed energia potenziale.
Come si calcola il commutatore di una funzione di $\hat{p}$ e $\hat{q}$?

(b) Determinare la dipendenza dal tempo degli operatori T e V in rappresentazione di Heisenberg sia in forma differenziale che integrale. Confrontare con il risultato classico.
Che relazione c'è fra la legge del moto quantistica e quella classica? (teorema di Ehrenfest)

(c) Intepretare il risultato della domanda precedente in termini di proprietà di invarianza della hamiltoniana.

(d) Determinare la a dipendenza dal tempo di $\hat{x}$ e $\hat{p}$ e interpretare il risultato in termini delle proprietà di invarianza della hamiltoniana.
Per entrambe le domande precedenti: quali sono le trasformazioni generate da $\hat{p}$ e da $\hat{q}$?

(19) Considerare una particella libera che al tempo $t = 0$ si trova nello stato avente funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = N \left[e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2} + e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} \right], \tag{13}$$

con $|N|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{1+e^{-\alpha x_0^2}}$, correttamente normalizzato ad uno.

(a) Determinare la funzione d'onda al tempo $t = 0$ nella base degli impulsi.

(b) Determinare la funzione d'onda al tempo t.
Come si calcola la dipendenza temporale per uno stato generico?

(c) Determinare la la densità di probabilità per misure di posizione al tempo t e interpretarne fisicamente i vari termini.
Ricordare l'esperimento di Zeilinger!

(20) Considerare una particella libera la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0 x} e^{-\alpha x^2/2} \tag{14}$$

dove α e k_0 sono costanti reali positive.

(a) Calcolare l'indeterminazione per una misura di energia.
Qual è la relazione fra energia ed impulso per una particella libera?

(b) Determinare la densità di probabilità per una misura di impulso nel limite in cui $\alpha \to 0$.
Ricordare la rappresentazione della delta di Dirac come successione di gaussiane normalizzate, Eq. (4.23) del testo.

(21) Calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso $\Delta^2 x$ e $\Delta^2 p$ nell n-esimo autostato di energia di una buca di potenziale infinitamente profonda. Confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.

Calcolare esplicitamente i valori medi degli operatori x, x^2, p e p^2 risolvendo gli integrali con il metodo di integrazione per parti.

(22) Si consideri la hamiltoniana unidimensionale avente potenziale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa\, \delta(x), \tag{15}$$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac e κ è un coefficiente reale.

(a) Nel caso in cui $\kappa < 0$ (buca deltiforme), determinare il numero di stati, i relativi autovalori e autofunzioni, e la parità di quest'ultime.
Ricordando che $d\theta(x)/dx = \delta(x)$ determinare la soluzione quando $x \neq 0$ e usare il risultato per determinare la soluzione anche per $x = 0$, imponendo le opportune condizioni di normalizzazione per e autofunzioni.

(b) Determinare le autofunzioni nel caso di autostati di scattering (stati ad energia positiva), ed in particolare discutere la dipendenza di tali autofunzioni dal segno di κ.
Risolvere in modo analogo al punto precedente.

(c) Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione nel caso di un'onda piana proveniente da $x = -\infty$ e determinare il valore di energia per cui la probabilità di riflessione è pari a quella di trasmissione.
Ricordare la definizione dei coefficienti di riflessione R e trasmissione T e imporre $R = T$.

(23) Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_\lambda = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\lambda\left(a + a^\dagger\right), \tag{16}$$

dove ω e λ sono costanti reali e positive e a è un operatore tale che

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1. \tag{17}$$

(a) Dimostrare che la hamiltoniana data può essere riscritta nella forma

$$H_\lambda = \hbar\omega \bar{a}^\dagger \bar{a} + K, \tag{18}$$

dove

$$\bar{a} = a + \delta \tag{19}$$

e δ e K sono numeri reali, e determinare il valore di questi numeri.
Che relazione c'è fra l'hamiltoniana scritta in termini di a, $a^\dagger$ e di $\bar{a}$, $\bar{a}^\dagger$?

(b) Determinare il commutatore $[\bar{a}, \bar{a}^\dagger]$ e utilizzare il risultato per determinare lo spettro di autovalori della hamiltoniana H_λ Eq. (16).
Che relazione c'è fra H_λ e l'operatore numero?

(c) Supporre ora che il termine proporzionale a λ nella Eq. (16) venga acceso al tempo $t > 0$, ossia che la hamiltoniana dipenda dal tempo nel modo seguente:

$$H(t) = \begin{cases} H_0 & t \leq 0; \\ H_\lambda & t > 0. \end{cases}, \tag{20}$$

dove H_λ è la hamiltoniana Eq. (16) , e H_0 è data da

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a. \tag{21}$$

Al tempo $t = 0$ (cioè subito prima che venga acceso il termine in λ) viene eseguita una misura di energia sul sistema che dà come risultato $E = 0$. Determinare il valore medio e l'indeterminazione degli operatori x e p definiti in termini degli operatori $\bar{a}$ e $\bar{a}^\dagger$ da

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\bar{a} + \bar{a}^\dagger\right), \qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\bar{a}^\dagger - \bar{a}\right). \tag{22}$$

Discutere se il sistema si trovi in uno stato di minima indeterminazione e perché.
A che stato corrisponde l'autovalore E=0?

(d) Dimostrare che lo stato in cui si trova il sistema subito dopo la misura del punto precedente è un autostato dell'operatore $\bar{a}$ Eq. (19) e determinare il corrispondente autovalore.
Che relazione c'è fra i valori medi di x, p ed $\bar{a}$?

(e) Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per l'operatore $a(t)$, ed utilizzare il risultato per determinare la dipendenza dal tempo dell'operatore $\bar{a}(t)$ Eq. (19)
Che relazione c'è fra la legge del moto di $\bar{a}(t)$ e quella del consueto operatore di distruzione?

(f) Determinare il valor medio degli operatori x e p, Eq. (22), per ogni tempo $t > 0$.
Che relazione c'è fra le leggi del moto di $\bar{a}(t)$ $\bar{a}^\dagger(t)$ e quelle di $x(t)$ e $p(t)$?

(g) Determinare la probabilità che il sistema preparato dalla misura del punto (c) venga rivelato nell'n-esimo autostato di energia della hamiltoniana Eq. (1) al tempo $t > 0$. Il risultato dipende dal tempo?
Come dipende dal tempo la probabilità di rivelare un sistema invariante per traslazioni temporali in un autostato della hamiltoniana?