PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

SECONDA PARTE
anno accademico 2020-2021

(1) Per un sistema meccanico d-dimensionale determinare:

(a) gli elementi di matrice dell'operatore posizione $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$ tra autostati dell'impulso $|\vec{p}\rangle$;
qual è l'operatore che genera la trasformazione $k_i \to k_i + delta$, dove k_i è l'i-esima componente dell'impulso?

(b) le autofunzioni dell'operatore posizione nella base degli autostati dell'impulso $\langle\vec{k}|\vec{x}\rangle$;
le condizioni di autostato rispetto alle diverse componenti dell'impulso sono indipendenti?

(c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.
idem: il cambio di base tra autofunzioni della posizione e dell'impulso lungo ciascuna dimensione dipende dalle altre dimensioni?

(2) In uno spazio d-dimensionale:

(a) determinare il generatore della trasformazione $\vec{k} \to \vec{k} + \hat{n}$, dove $\vec{k}$ è un vettore impulso, e $\hat{n}$ è un qualunque versore (vettore di norma uno), ed esprimere il risultato in termini dell'operatore posizione d-dimensionale $\hat{\vec{x}}$ nello spazio degli impulsi;
Che differenza c'è fra questo caso e quello della domanda precedente?

(b) scrivere l'operatore che realizza la trasformazione finita discussa al punto precedente, prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base degli autostati dell'impulso.
Che relazione c'è tra trasformazione finita ed infinitesima?

(3) Considerare un sistema di tre particelle di ugual massa m su un segmento di lunghezza L, ciascuna delle quali interagisce con i primi vicini, e con le due particelle più esterne che interagiscono con un estremo fisso, tutte attraverso un potenziale armonico con costante elastica k. Il potenziale per il sistema è dunque dato da

$$V(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}k^2 \left(y_1^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + y_3^2\right), \tag{1}$$

dove $y_i = x_i - x_i^{(0)}$ sono gli spostamenti delle tre particelle dalla posizione di equilibrio $x_i^{(0)} = i\frac{L}{4}$.

(a) Disaccoppiare la Hamiltoniana mediante un'opportuno cambio di coordinate.
Che condizioni deve soddisfare il cambio di coordinate?

(b) Determinare lo spettro della hamiltoniana e discutere la sua degenerazione.
Che relazione c'è fra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (1)?

(4) Considerare una sistema di due particelle unidimensionali, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega\left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right) + \hbar\lambda\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) \tag{2}$$

dove a_i è un operatore che agisce sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{3}$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{4}$$

per ogni i, j.

(a) determinare la più generale trasformazione lineare degli operatori a_i che preserva le relazioni di commutazione;
Che condizione deve soddisfare la trasformazione?

(b) utlizzare il risultato del punto precedente per determinare lo spettro della hamiltoniana.
Che relazione c'è tra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (2)?

(5) (a) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$.
Si può fare la stessa manipolazione che nel caso classico?

(b) Discutere se il passaggio a coordinate baricentrali e relative sia l'unico che separa un problema centrale.
Quali condizioni deve soddisfare il cambio di coordinate?

(6) (a) Per un sistema *bidimensionale*, determinare l'operatore (hermitiano) impulso radiale, ed determinare l'operatore energia cinetica esplicitamente in coordinate polari (r, θ),

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(b) Dimostrare che in d dimensioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\dagger = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d-1}{r}\right) \tag{6}$$

attraverso il calcolo dell'elemento di matrice $\langle\psi|\tilde{p}_r|\phi\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate, dove $\tilde{p}_r = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$.
Qual è l'espressione dell'elemento di volume in d dimensioni?

(c) Separare l'operatore cinetico in d dimensioni in parte radiale e parte angolare, sfruttando l'espresione del laplaciano in d dimensioni

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2}, \tag{7}$$

dove L^2 è un operatore che agisce solo sulle variabili angolari.
Qual è l'espressione della derivata radiale?

(7) Considerare una trasformazione generale di coordinate in d dimensioni $\vec{x} \to \vec{\xi}$, con $\xi_i = \xi_i(x_j)$. Determinare l'espressione della delta di Dirac d dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{\xi} - \vec{\alpha})$, dove $\vec{\alpha}$ è un vettore (costante) d-dimensionale in termini della delta di Dirac $\delta^{(d)}(\vec{x})$, definita come

$$\delta^{(d)}(\vec{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n), \tag{8}$$

dove $x_1, \ldots, x_d$ sono le d componenti del vettore $\vec{x}$.
Come si trasforma la delta unidimensionale sotto un cambio di coordinate?

(8) Determinare la dipendenza dal tempo del valor medio delle tre componenti del momento angolare $\langle L^i\rangle$ in uno stato qualunque per un sistema avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}). \tag{9}$$

Come si calcola la dipendenza dal tempo di un valor medio? Quanto vale il commutatore del momento angolare con la Hamiltoniana?

(9) Determinare ad ogni tempo t il valor medio del vettore posizione $\langle\vec{x}\rangle$ e del vettore impulso $\langle\vec{p}\rangle$ per un sistema che al tempo zero ha

$$\langle\vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \langle\vec{p}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

e la cui dinamica è descritta dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \vec{B}\cdot\vec{L}, \tag{11}$$

dove $\vec{B}$ è il vettore costante

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Che trasformazione è l'evoluzione temporale per la hamiltoniana data?

(10) Considerare un operatore $\vec{v}$ che soddisfa le relazioni

$$[L_i, v_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}v_k\,. \tag{13}$$

(a) Dimostrare che l'operatore

$$v_i' = e^{-i\phi L_x/\hbar}v_i e^{i\phi L_x/\hbar} \tag{14}$$

è l'operatore v_i ruotato di un angolo ϕ attorno all'asse x.
Come si calcola l'espressione data? (Formula BCH).

(b) Dimostrare che

$$e^{i\pi L_x/\hbar}|l,m\rangle = |l,-m\rangle. \tag{15}$$

Come agisce l'operatore $e^{i\pi L_x/\hbar}$ su L_z?

(c) Mostrare che l'operatore $e^{i\pi\frac{L_x}{2\hbar}}e^{-i\pi\frac{L_y}{\hbar}}e^{-i\pi\frac{L_x}{2\hbar}}$ può essere scritto come l'operatore di rotazione attorno all'asse z di un angolo ϕ. Determinare ϕ.
Come agisce l'operatore $e^{i\phi/2L_x/\hbar}$ su L_y?

(11) Considerare uno stato $|0\rangle$ avente funzione d'onda

$$\langle\vec{x}|0\rangle = \psi_0(\vec{x}) = f(r), \tag{16}$$

con $r = |\vec{x}|$, ed i tre stati $|i\rangle$ aventi funzione d'onda

$$\langle\vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x}) = x^i\psi_0(\vec{x}). \tag{17}$$

(a) Dimostrare che $\psi_0(\vec{x})$ è un autostato di tutte le componenti L^i del momento angolare e dunque anche di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.
Che trasformazione genera L_i, e come si trasforma r sotto questa trasformazione?

(b) Dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ è un autostato di L_i e determinare l'autovalore corrispondente.
Che trasformazione genera L_i, e come si trasforma x^i sotto questa trasformazione?

(c) Calcolare il commutatore $[L_i,[L_i,x^j]]$ ed utilizzare il risultato per dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ sono tutti autostati di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.
Quanto vale il commutatore di L_i con x^j?

(12) Considerare lo spazio degli stati fisici avente per vettori di base i tre stati $|i\rangle$ Eq. (17).

(a) Determinare le matrici che rappresentano gli operatori di momento angolare L^i in questo spazio, ossia

$$L^i_{jk} = \langle j|L^i|k\rangle. \tag{18}$$

Quanto vale il commutatore di L^i con x^j?

(b) Diagonalizzare l'operatore $L_z \equiv L^3$ in questo spazio e determinare la matrice di passaggio fra la base degli stati Eq. (17) e la base in cui L_z è diagonale.
Come è fatta la matrice di cambio di base?

(c) Determinare gli elementi di matrice di tutt'e tre gli operatori L^i nella base in cui L_z è diagonale *senza* usare la matrice di cambiamento di base determinata al punto precedente, ma sfruttando le relazioni di commutazione fra ghli operatori L^i.
Come si esprimono L^i in termini di $L_\pm$?

(13) Considerare la proiezione del momento angolare lungo un asse generico $\vec{n}$, $L_n = \vec{L}\cdot\vec{n}$ (dove $|\vec{n}| = 1$).

(a) Dimostrare che su un qualunque stato $|lm\rangle$ tale per cui $l = 1$ vale la seguente relazione (identità di Hamilton-Cayley):

$$(L_n^3 - \hbar^2 L_n)|lm\rangle = 0. \tag{19}$$

Si scelga la base di autostati di L_n

(b) Dimostrare che se $|\psi\rangle$ è un autostato di L_n allora il valor medio delle componenti di $\vec{L}$ nel piano ortogonale ad $\vec{n}$ è nullo.
Si consideri il caso in cui l'asse z è diretto lungo $\vec{n}$

(c) Determinare il valor medio di L_i in ciascuno degli stati $|\psi_i$ Eq. (17).
Prendere $\vec{n}$ lungo uno qualunque degli assi ed utilizzare il risultato delle domande precedenti.

(d) Come è possibile che gli stati ψ_i siano autostati di L_i senza violare il principio di indeterminazione?
Qual è il vincolo imposto dal principio di indeterminazione su questi stati?

(14) Considerare un stato $|\psi\rangle$ al tempo $t = 0$ tale che

$$L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle \tag{20}$$

$$\frac{L_x + L_y}{\sqrt{2}}|\psi\rangle = \hbar|\psi\rangle\,. \tag{21}$$

(a) Determinare $|\psi\rangle$.
Qual è l'espressione di $|\psi\rangle$ nella base degli autostati di L^2 e L_z?

(b) Sia $H = \alpha L^2 + \beta L_z$, con α e β parametri reali. Determinare, al tempo t generico, $|\psi, t\rangle$ e $\langle L_i\rangle_t$.
Quali sono le equazioni del moto alla Heisenberg per L_i?

(15) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$ (ossia un qubit), soggetto alla hamiltoniana

$$H = B\hat{s}_z. \tag{22}$$

Al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di spin lungo l'asse x.

(a) Determinare lo stato del sistema ad ogni tempo t, espresso nella base degli autostati di $\hat{s}_z$.
Come si trasforma lo stato?

(b) Determinare il valor medio dello spin $\vec{s}(t) = \langle \hat{\vec{s}} \rangle$ ad ogni tempo t. Confrontare il risultato con quello del punto precedente e con il risultato del problema 9.
Come si trasforma σ^i?

(c) Determinare la matrice $M_{ij}(t)$ tale che

$$s^i(t) = M_{ij}(t)s^j(0) \tag{23}$$

che lega $\vec{s}(t)$ al valore iniziale $\vec{s}(0)$.
Di che matrice si tratta?

(16) Determinare i coefficienti di Clebsch-Gordan per la composizione di due spin 1.
Qual è il valore massimo dello spin totale? In quanti modi si può realizzare $s_z = 1$ totale?

(17) Sia dato un sistema di due particelle, l'una avente spin $\frac{1}{2}$ e l'altra spin 1, che interagiscono attraverso la hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1\vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{24}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare relativo del sistema di due particelle.

(a) Separare completamente il problema.
In che base si separa la hamiltoniana?

(b) Supponendo noto e non-degenere lo spettro dell'hamiltoniana radiale, determinare lo spettro di H e la sua degenerazione.
Che cosa determina la degenerazione degli autostati di momento angolare?

(18) Considerare la funzione d'onda

$$\psi_\ell(\vec{x}) = d_{ij\ldots k}x_i x_j \ldots x_k \tag{25}$$

dove $d_{ij\ldots k}$ è completamente simmetrica sotto lo scambio di qualunque coppia di indici, e tale che la traccia su qualunque coppia di indici i, j si annulli, ossia tale che

$$\sum_{i=1}^{3} d_{i_1\ldots i \ldots i \ldots i_\ell} = 0 \tag{26}$$

per ogni possibile scelta di indici sommati.

(a) Determinare l'azione degli operatori $\vec{p}^2$ e p_r^2 (quadrato dell'impulso totale e dell'impulso radiale) sulla funzione d'onda data;
Come agiscono gli impulsi totale e radiale visti come operatori differenziali?

(b) utilizzare il risultato per dimostrare che la funzione d'onda data è un'autofunzione del momento angolare orbitale totale

$$L^2\psi_\ell(\vec{x}) = \hbar^2\ell(\ell+1)\psi_\ell(\vec{x}), \tag{27}$$

dove ℓ è il numero di indici di $d_{ij\ldots k}$.
Che relazione c'è fra quadrato dell'impulso totale, radiale, e momento angolare?

(c) Discutere la relazione tra l'autovalore trovato e le regole di composizione dei momenti angolari.
Qual è il massimo valore del momento angolare se si combinano ℓ stati di momento angolare uno?

(19) Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\left(\vec{L} + \vec{B}\right)^2}{2I}, \tag{28}$$

dove $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ sono gli operatori di momento angolare, I è una costante reale positiva, e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

(a) Determinare gli autostati ed autovalori della hamiltoniana H e la loro degenerazione.
Lungo che asse è diretto $\vec{B}$?

(b) Supporre che il sistema sia posto in un sistema di riferimento rotante, attorno ad un asse parallelo a $\vec{B}$, con pulsazione ω. Determinare lo spettro di energia nel sistema rotante se nel sistema a riposo la hamiltoniana è data dalla H Eq. (28).
Qual è la forma dell'equazione di Schrödinger nel sistema rotante?

(20) Condiderare un oscillatore armonico isotropo in coordinate sferiche.

(a) Determinare la funzione d'onda di stato fondamentale (a meno della normalizzazione).
Che condizione soddisfa lo stato fondamentale?

(b) Determinare la forma generica delle funzioni d'onda di stato eccitato.
Come si ottengono gli stati eccitati?

(21) Considerare un oscillatore armonico *bidimensionale* isotropo avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^2, \tag{29}$$

con operatori di distruzione $a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x_i + i\frac{p_i}{m\omega}\right)$. Definire gli operatori

$$O_{ij} \equiv a_i^\dagger a_j. \tag{30}$$

(a) Determinare le relazioni di commutazione degli operatori O_{ij} fra di loro e con la hamiltoniana.
Che relazione c'è fra i commutatori di a e $a^\dagger$ e quelli degli operatori dati?

(b) Esprimere la hamiltoniana e l'operatore momento angolare in termini degli operatori O_{ij}.
Come è fatto il momento angolare in due dimensioni?

(c) Calcolare la degenerazione dello spettro e confrontare con la dimensione dello spazio di autostati del momento angolare avente fisso momento angolare totale.
C'è una relazione fra le relazioni di commutazione degli operatori O_{ij} e quelle dei momenti angolari?

(d) Riesaminare utilizzando questo formalismo il problema n. (4).
Che forma ha in termini momento angolare il contributo proporzionale a λ?

(e) Determinare lo spettro e la degenerazione del problema dato in un sistema di riferimento rotante nel piano attorno all'origine con velocità angolare ω' , sia nel caso generale, sia nel caso particolare in cui $\omega' = \omega$ (la pulsazione dell'oscillatore).
Quanto valgono gli autovalori di energia nel nuovo sistema?

(22) (a) Per un oscillatore armonico tridimensionale, dimostrare che in un autostato di energia i valori medi di energia cinetica e potenziale sono uguali $\langle T \rangle = \langle V \rangle$, confrontando la dipendenza dai parametri m ed ω dell'autovalore di energia e dell'hamiltoniana.
Come dipende dai parametri l'autovalore?

(b) Utilizzare il risultato per calcolare il prodotto dell'indeterminazione di $|\vec{x}|^2$ and $|\vec{p}|^2$ in un autostato di energia e confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.
Che relazione c'è fra T, V e le indeterminazioni richieste?

(23) Considerare una Hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$.

(a) Determinare il generatore delle dilatazioni delle coordinate.
Che relazione c'è fra i; generatore unidimensionale e quello tridimensionale?

(b) Determinare la trasformazione infinitesima sotto dilatazioni della Hamiltoniana, e dei suoi elementi di matrice in un autostato di energia.
Quanto vale il commutatore della Hamiltoniana con un operatore qualunque in uno stato stazionario?

(c) Utilizzare il risultato della domanda precedente per mettere in relazione la trasformazione sotto dilatazioni dei valori medi in un autostato di energia degli operatori energia cinetica es energia potenziale (teorema del viriale). Considerare sia il caso generale che il caso in cui

$$V(\vec{x}) = \lambda r^{-\alpha}, \tag{31}$$

con $r = |\vec{x}|$ e λ una costante reale.

Come si ottiene la trasformazione del valor medio in termini del generatore della trasformazione?

(d) Utilizzare il risultato della domanda precedente per determinare la dipendenza degli autovalori di energia dai parametri del problema, m, λ e α per gli stati legati di un sistema con potenziale Eq. (31). Che cosa succede quando $\alpha > 2$?
Che relazione c'è fra T, V e r?

(24) Considerare un atomo di idrogeno immerso in un campo magnetico, la cui hamiltoniana è data da

$$H = H_0 - \omega L_z \,,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno e $\omega = \frac{eB}{2mc}$ è un accoppiamento con un campo magnetico di intensità B diretto lungo l'asse z.

(a) Dimostrare che gli autostati $|nlm\rangle$ dell'atomo di idrogeno sono anche autostati di questa hamiltoniana, e determinare lo spettro di autovalori di energia e la degenerazione.
Che cosa cambia l'accoppiamento col campo magnetico?

(b) Suppponendo che al tempo $t = 0$ la particella si troi nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle\right)$, Determinare la probabilità di trovare il sistema al tempo t negli stati $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle\right)$; $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,{-1}\rangle + |211\rangle\right)$; oppure $|\phi_3\rangle = |210\rangle$. Qual è l'interpretazione fisica di questi stati?.
Usare la rappresentazione di Schroedinger.

(c) Per lo stato dato al punto precedente, determinare il valor medio dell'operatore momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = \frac{e}{3mc}\vec{L}$ ad ogni tempo t.
Usare la rappresentazione di Heisenberg.

(25) Considerare un atomo di idrogeno nello stato fondamentale.

(a) Determinare il valor medio di r^k.
Come è definita la funzione Gamma (fattoriale)?

(b) Determinareil valor medio della posizione radiale, la sua varianza, il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica. Confrontare con il punto (c) del problema precedente. *Come dipendono da r queste quantità?*

(c) Determinare il valor medio dell'impulso $\vec{p}$. *Come sono legati l'impulso in coordiate cartesiane e quello in coordinate sferiche?*

(26) Considerare un oggetto classico puntiforme di massa m che al tempo $t = 0$ si trova in $\vec{x}$ ed al tempo T si trova in $\vec{x}'$.

(a) Determinare l'azione classica in funzione di $\vec{x}$, $\vec{x}'$, T, nel caso libero. *Che cosa si conserva nel moto classico?*

(b) Ripetere il calcolo del punto precedente nel caso di potenziale armonico, in una dimensione. *Che forma hanno le leggi del moto classiche in termini delle condizioni iniziali e finali date?*

(c) Calcolare in entrambi i casi la derivata dell'azione rispetto a $\vec{x}'$ e verificare che essa fornisce il valore dell'impulso $\vec{p}(T)$.

(27) Considerare un oscillatore armonico quantistico, avente propagatore

$$K(x', T; x, 0) = f(T) \exp \frac{i}{\hbar} S(x', T; x, 0), \tag{32}$$

dove $S(x', T; x, 0)$ è l'azione classica determinata nel problema precedente e $f(T)$ è una normalizzazione opportuna.

(a) Dimostrare che il propagatore soddisfa l'equazione di Schrödinger per una opportuna scelta della normalzzazione $f(T)$ e dimostrare che questa richiesta determina $f(T)$ a meno di una costante moltiplicativa. *Che relazione c'è fra propagatore e funzione d'onda?*

(b) Dimostrare esplicitamente che quando $T = 0$

$$K(x', 0; x, 0) = \delta(x' - x) \tag{33}$$

e che questo fissa la costante moltiplicativa lasciata ineterminata al punto precedente. *Come si rappresenta la delta di Dirac come successione di gaussiane?*

(28) Considerare una particella libera accoppiata ad un campo elettrico, avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - e\vec{E} \cdot x, \tag{34}$$

e definire il corrispondente propagatore $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0)$.

(a) Calcolare il commutatore dell'operatore impulso in rappresentazione di Schrödinger con l'operatore di evoluzione temporale e scrivere il risultato in termini dell'operatore impulso in rappresentazione di Heisenberg. *Come si scrive l'operatore di evoluzione temporale?*

(b) Definire il propagatore $K(\vec{p}', t; \vec{p}, 0)$ nello spazio degli impulsi, calcolare l'elemento di matrice del commutatore deter al punto precedente fra autostati dell'impulso ed utilizzare il risultato per dimostrare che $K(\vec{p}', t; \vec{p}, 0) \neq 0$ se e solo se $\vec{p}' = \vec{p} + e\vec{E}t$. *Che relazione c'è fra propagatore ed operatore di evoluzione temporale?*

(c) Determinare se è vero o non è vero che $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0) = K(-\vec{x}', t; -\vec{x}, 0)$ e se è vero o non è vero che $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0) = K(\vec{x}, t; \vec{x}', 0)$ *Che forma ha l'elemento di matrice del propagatore fra autostati di energia?*

(29) Considerare una particella unidimensionale in un cristallo, libera di nuoversi nella regione $-a < x < a$ ma soggetta a forze di richiamo armoniche al di fuori di questo intervallo. Il potenziale è dato da

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & x > a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2 & x < -a \end{cases} . \tag{35}$$

(a) Scrivere la soluzione semiclassica nelle tre regioni date.
Come sono fatte le condizioni di raccordo?

(b) Determinare lo spettro di energia in approssimazione WKB.
Ricordare l'idea del metodo: imporre che la soluzione nella regione centrale sia la stessa se raccordata da sinistra o da destra.

(c) Determinare lo spettro nei limiti $a \to 0$ e $a \to \infty$.
Qual è il parametro che determina la se a è "piccolo" o "grande"?.

(30) Considerare un sistema tridimensionale soggetto ad un potenziale idrogenoide schermato

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & 0 < r < R \\ -\frac{e^2}{r}e^{-\lambda(r-R)} & r > R \end{cases} \tag{36}$$

(a) Calcolare la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale.
Qual è la differenza tra la hamiltoniana data e qualla idrogenoide imperturbata?

(b) Discutere gli andamenti della soluzione trovata quando $\lambda \to 0$ e quando $R \to \infty$.
Che cosa diventa il potenziale nei due limiti dati?

(31) La carica del nucleo di un atomo idrogenoide aumenta di una unità in seguito ad un decadimento β.

(a) Determinare la variazione di energia dell'elettrone nell'n-esimo stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni, utilizzando il risultato del problema 26 al punto (b).
Ricordare il teorema del viriale

(b) Determinare esattamente la differenza di energia tra il lvello n-esimo di energia per due atomi idrogenoidi per cui la carica del nucleo differisce di una unità e confrontare con il risultato trovato al punto precedente.
Quando è buona l'approssimazione perturbativa, e perché?

(32) Considerare un potenziale perturbante della forma

$$V(x) = -e\mathcal{E}x \tag{37}$$

(accoppiamento con un campo elettrico).

(a) Determinare l'effetto della perturbazione al primo ordine sull'energia dell'n-esimo livello di una buca di potenziale infinita unidimensionale.
La perturbazione dipende dal livello?

(b) Determinare l'effetto della perturbazione al primo ordine non-banale (il primo al quale la perturbazione non si annulla) sull'energia dell'n-esimo livello di un oscillatore armonico unidimensionale.
Qual è il primo ordine al quale la perturbazione non si annulla e perché?

(c) Nel caso della domanda precedente, determinare lo spettro esatto e confrontare copn il risultato perturbativo.
Perché il risultato perturbativo e quello esatto coincidono?

(33) Considerare una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad potenziale armonico isotropo, perturbata da un campo elettrico diretto lungo l'asse z.

(a) Dimostrare che gli elementi di matrice del potenziale perturbante soddisfano

$$\langle nlm|\hat{z}|000\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\delta_{n0q}\delta_{l1}\delta_{m0}, \tag{38}$$

dove $|nlm\rangle$ sono autofunzioni di energia e di momento angolare con $E_{nl} = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right)$, e $\hat{z}$ è l'operatore posizione lungo l'asse z, esprimendo l'operatore $\hat{z}$ in termini di operatori di creazione e distruzione per l'oscillatore armonico unidimensionale, e le autofunzioni dell'oscillatore armonico in coordinate cartesiane in termini di quelle in coordinate sferiche.
Che valore del momento angolare porta $\hat{z}$ (ricordare il problema 12 puntoc)

(b) Determinare la perturbazione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine pertubativo.
Quanto vale la perturbazione al primo ordine?

(34) Considerare un oscillatore armonico bidimensionale con potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + \lambda xy. \tag{39}$$

(a) Trattando il termine proporzionale a λ come una perturbazione, determinare la correzione ai primi due livelli eccitati al primo ordine in λ.
Diagonalizzare la matrice della perturbazione.

(b) Determinare la degenerazione degli stati perturbati.
A che cosa è dovuta la degenerazione in assenza di perturbazione?

(c) Determinare lo spettro esattamente e discutere per quali valori del parametro λ l'approssimazione perturbativa è buona.
Ricordare i problemi 3-4

(35) Considerare una particella unidimensionale in una buca di potenziale infinita, soggetta ad un potenziale di interazione con un campo elettrico della forma della Eq. (37). ma ora con intensità dipendente dal tempo secondo la legge

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\Theta(t)e^{-t\tau}, \tag{40}$$

dove τ è una costante reale positiva.

(a) Dimostrare che sotto l'azione di questo ptenziale il sistema può subire una transizione fra lo stato fondamentale e qualunque stato eccitato di ordine pari.
Qual è la parità delle autofunzioni della buca?

(b) Calcolare la probabiltà di transizione fra lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato nel limite $t \to \infty$.
Che cosa succede se $t \gg \tau$?

(36) Considerare una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad potenziale armonico isotropo, perturbata a partire dal tempo $t = 0$ da un campo elettrico diretto lungo l'asse z oscillante e smorzato:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0\Theta(t)\cos\omega t e^{-t/\tau}, \tag{41}$$

dove ω e τ sono costanti reali positive e $\vec{E}_0$ è un vettore costante.

(a) Scrivere l'espressione dell'ampiezza di transizione dallo stato fondamentale in uno stato eccitato qualunque al primo ordine della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo.

(b) Dimostrare che solo una transizione può avvenire e determinarne la probabilità per $t \gg \tau$.
Ricordare il problema 33 punto a.

(37) Determinare la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born:

(a) per la diffusione da un potenziale a "sfera dura":

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r < R \\ 0 & r \geq R \end{cases}; \tag{42}$$

(b) per la diffusione di un potenziale a "delta-shell"

$$V(r) = V_0 \delta(r - r_0); \tag{43}$$

(c) per la diffusione da potenziale di Yukawa

$$V(r) = \frac{V_0}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}, \tag{44}$$

esprimendo il risultato in termini dell'energia E della particella incidente e dell'angolo di *scattering* θ tra le direzioni della particella entrante e di quella uscente e discutendo la dipendenza della sezione d'urto da E e da θ;
Esprimere in termini di E e θ il modulo dell'impulso trasferito $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$.

(d) per la diffusione da potenziale coulombiano

$$V(r) = e^2 \frac{1}{r} \tag{45}$$

confrontando con il caso di potenziale di Yukawa.
In quale limite il potenziale di Yukawa si riduce a quello coulombiano?

(38) Considerare un sistema di n particelle identiche non interagenti. Supporre che la hamiltoniana del sistema sia data dalla somma di n hamiltoniane indentiche ad un corpo H_i aventi spettro noto:

$$H = \sum_{I=1}^{n} H_i; \qquad H_i |k_i\rangle = E_k |k_i\rangle. \tag{46}$$

(a) Determinare l'energia dello stato fondamentale quando le particelle hanno spin 0, oppure quando hanno spin $\frac{1}{2}$.
Quanti stati ci sono per ogni livello energetico?

(b) Quando $n = 3$ scrivere la funzione d'onda di stato fondamentale per entrambi i valori dello spin.
Che numeri quantici porta la funzione d'onda?

(39) Considerare un sistema di due particelle identiche di massa m in una dimensione soggette ad un potenziale armonico, con hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega (x_1^2 + x_2^2). \tag{47}$$

Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due livelli eccitati e scrivere la funzione d'onda in termini di funzioni d'onda di particella singola

(a) supponendo che le due particelle abbiano spin 0;
Quante autofunzioni ci sono per ogni scelta di numeri quantici?

(b) supponendo che le due particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$ e si trovino in uno stato di tripletto (autostato di spin totale $s = 1$).
Quali e quante sono le funzioni d'onda di tripletto?

(40) Considerare un sistema di due particelle identiche in una dimensione, con hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + B \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \,, \tag{48}$$

dove $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin delle due particelle e B ed ω sono costanti reali positive.

(a) Nel caso di fermioni di spin $\frac{1}{2}$, determinare la funzione d'onda completa (spaziale e di spin) per lo stato fondamentale ed il primo livello eccitato del sistema, ed i corrispondenti autovalori di energia e spin, a seconda dei valori dei parametri B ed ω.
Esprimere l'hamiltoniana in termini di un oppurtuno insieme di operatori che commutano.

(b) Rispondere alle domande del punto precedente considerando ora il caso di due bosoni di spin 1.
Quali sono le proprietà di simmetria della funzione d'onda per scambio di particelle identiche nel caso di bosoni e fermioni?

(41) Considerare una coppia di elettroni in una dimensione in uno stato di spin totale $S = 1$, ed interagenti attraverso un potenziale attrattivo

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & |x_1 - x_2| > a \\ -V_0 & |x_1 - x_2| \leq a \end{cases} . \tag{49}$$

Determinare l'energia di stato fondamentale quando l'impulso totale del sistema si annulla.
Come è fatta la funzione d'onda nelle tre regioni?

(42) Considerare un atomo di elio, formato da due elettroni identici di massa m e spin $\frac{1}{2}$ che si muovono nel potenziale di un nucleo. Detti $\vec{x}_1$, $\vec{p}_1$, $\vec{x}_2$ e $\vec{p}_2$ gli operatori posizione ed impulso dei due elettroni, ed e una costante reale (carica dell'elettrone), l'hamiltoniana è

$$H = H_0 + H_{12} \tag{50}$$

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_1|} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_2|}, \tag{51}$$

$$H_{12} = \frac{2e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \tag{52}$$

(a) Determinare funzione d'onda, energia e degenerazione per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato del sistema trascurando il termine H_{12}.
Quali sono i possibili stati di spin del sistema?

(b) Determinare la correzione all'energia dello stato fondamentale, e del primo stato eccitato avente momeento angolare orbitale totale nullo, trattando H_{12} come una perturbazione al primo ordine (non è necessario calcolare l'integrale).
Quali sono gli stati corrispondenti al primo livello eccitato?