PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

PRIMA PARTE
anno accademico 2021-2022

(1) Si consideri una oggetto quantistico che può passare attraverso uno schermo trasparente, diviso in tre zone, corrispondenti ai tre ket indicati in notazione binaria da $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ (ossia $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$) e si supponga che essa si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{i}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle. \tag{1}$$

Si supponga inoltre che lo schermo possa essere equipaggiato di rivelatori che indicano se l'oggetto è passato attraverso ciascuna delle tre zone.

(a) Qual è la probabilità che l'oggetto venga rivelato in ciascuna delle tre zone dello schermo?
come si calcola la probabilità dei risultati di una misura

(b) Qual è la probabilità che l'oggetto *non* venga rivelato nella zona 3 dello schermo?
come si calcola la probabilità che un evento non accada?

(c) Se solo il rivelatore per la zona 3 è attivato, ed esso rivela che l'oggetto non è passato dalla zona 3 (ma si ha la certezza che esso sia passato attraverso lo schermo) in che stato si trova l'oggetto?
in che stato si trova un sistema dopo la misura? Spiegare la misura come proiezione

(2) Si supponga ora che l'oggetto della domanda precedente possa arrivare sullo schermo passando da due fenditure, A e B. Se passa dalla fenditura A, si trova nello stato Eq. (1), ma se invece passa dalla fenditura B si trova nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{i}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle. \tag{2}$$

Nel caso della domanda precedente solo la fenditura A era aperta.

(a) Se invece è aperta la fenditura B la risposta a ciascuna delle domande del punto precedente come cambia, e perché?
Da che cosa dipendono le probabilità? E gli stati?

(b) Se sono aperte entrambe le fenditure, in che stato si trova il sistema (supponendo che passi con uguale probabilità dall'una o dall'altra fenditura)?
Che cosa dice il principio di sovrapposizione?

(c) Se la fase dello stato $|\phi\rangle$ cambia per un fattore i, cambia il risultato della risposta alle due domande precedenti, e se sì come?
Quando è misurabile una fase?

(3) Si supponga di essere nella situazione delle due domande precedenti, nel caso in cui l'oggetto non viene rivelato nella zona 3 dello schermo.

(a) È possibile distinguere a posteriori, con una misura opportuna, il caso in cui l'oggetto è passato da A, e quello in cui è passato da B (ma in entrambi i casi non viene rivelato in 3)?
Gli stati dati sono ortogonali?

(b) Se oltre che non essere rivelato nella zona 3, lo stato *viene* rilevato nella zona 1, la risposta alla domanda precedente cambia?
Gli stati in esame hanno una sovrapposizione non-nulla con lo stato $|10\rangle$*?*

(c) Se so che il sistema non si trova in nessuno dei due stati corrispondenti ai due casi considerati al punto (a), posso dire in che stato si trova? E se sì, qual è?
Gli stati dati formano una base?

(4) Considerare ora un sistema quantistico che può trovarsi in quattro stati esaustivi ed esclusivi, indicati come $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, e considerare gli stati del sistema

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|00\rangle + (1+i)|01\rangle\right] \tag{3}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i|00\rangle + |10\rangle\right], \tag{4}$$

$$|\psi_3\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle, \tag{5}$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|10\rangle + |11\rangle\right]. \tag{6}$$

(a) Determinare la probabilità che un sistema preparato nello stato $|00\rangle$ venga rivelato in ciascuno dei quattro stati $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_4\rangle$.
Come si calcola la probabilità che un sistema preparato in uno stato venga rivelato in un altro stato?

(b) Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\phi\rangle = N\left[|\psi_1\rangle + 2i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle\right]. \tag{7}$$

Determinare la costante di normalizzazione N. Determinare inoltre la probabilità che un sistema preparato in questo stato venga rivelato nello stato $|00\rangle$.
Qual è l'espressione dello stato dato in termini degli stati di base?

(c) Supporre che su un sistema che si trova nello stato $|\phi\rangle$ Eq. (7) venga eseguita una prima misura che rivela che si trova nello stato $|\psi_2\rangle$. Qual è la probabilità di trovare questo risultato? Qual è probabilità che una successiva misura riveli il sistema nello stato $|00\rangle$?
Attenzione: gli stati $|\psi_1\rangle$ *e* $|\psi_2\rangle$ *sono ortogonali?*

(5) Per un sistema di un qubit, considerare gli stati $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$.

(a) Scrivere in notazione ket-bra l'operatore lineare $\mathcal{H}$ che agendo sullo stato $|0\rangle$ lo trasforma nello stato $|+\rangle$ e agendo sullo stato $|1\rangle$ lo trasforma nello stato $|-\rangle$ (operatore di Hadamard).

Come agisce un operatore su uno stato?

(b) Scrivere la matrice associata all'operatore $\mathcal{H}$ nella base degli stati $|0\rangle$, $|1\rangle$.
Come si calcola la matrice associata ad un operatore?

(6) Nella situazione della domanda 3 considerare un'osservabile che prende il valore +2 quando l'oggetto è passato dalla fenditura A, 0 quando è passato dalla fenditura B e -2 quando si trova nello stato che si chiede di determinare al punto (c).

(a) Scrivere la matrice dell'operatore A nella base degli stati $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$.
come è definita la matrice associata ad un operatore?

(b) Scrivere l'aggiunta della matrice A.
come è definita la matrice aggiunta?

(7) Siano A e B operatori hermitiani e sia $C = A\,B$.

(a) Determinare l'operatore $C^\dagger$ in termini di A e B.
come agisce C?

(b) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = C^\dagger$?
Che forma hanno C e $C^\dagger$ in termini di A e B?

(c) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = -C^\dagger$?
Che forma hanno C e $C^\dagger$ in termini di A e B?

(d) Dimostrare che C può sempre essere scritto come somma di un operatore hermitiano e di un operatore anti-hermitiano e scrivere l'espressione esplicita della parte hermitiana e della parte antihermitiana di C in termini di A e B. $C = -C^\dagger$.
Posso sempre scrivere C come somma di termini aventi la forma di quelli considerati ai punti precedenti?

(8) Nella situazione della domanda 4, considerare l'operatore associato all'osservabile O, che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi_2\rangle$ e 0 quando il sistema non viene rivelato nello stato $|\psi_2$ (ossia se viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi_2\rangle$).

(a) Scrivere la matrice dell'operatore associato a questa osservabile, nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$
come si scrive l'operatore associato ad un'osservabile?

(b) Se un sistema è preparato nello stato $|\psi_1\rangle$, quali sono i possibili valori di una misura dell'osservabile O, qual è la probabilità di trovare ciascuno di questi valori, e in che stato si trova il sistema dopo la misura in ciascun caso?
che cosa succede quando si misura un'osservabile?

(c) Supporre che il sistema si trovi in uno stato qualunque $|\chi\rangle$ e che venga effettuata una misura dell'osservabile O. Determinare i due operatori che agendo sullo stato $|\chi\rangle$ restituiscono lo stato in cui il sistema si trova dopo la misura, a seconda dei due risultati possibili della misura. Scrivere il risultato sia in forma ket-bra, che come matrici nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$.
che proprietà ha l'operatore cercato?

(9) Considerare la situazione del problema (3), punto (a): siano detti $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ i due stati in cui si trova il sistema quando l'oggetto è rispettivamente passato da A o da B. Costruire gli operatori seguenti, scrivendone la matrice 3×3 nella base degli stati $|01\rangle$, $|10\rangle, |11\rangle$.

(a) l'operatore A, associato ad un'osservabile che dà come risultati della misura $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\alpha\rangle$, 0 quando esso si trova nello stato $|\beta\rangle$ e -1 quando esso non si trova né nello stato $|\alpha\rangle$, né nello stato $|\beta\rangle$;

(b) l'operatore B, associato all'osservabile che dà $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\alpha\rangle$ (come prima), ma -1 in tutti gli altri casi;

(c) l'operatore C, associato all'osservabile che dà $+1$ quando il sistema si trova nello stato $|\alpha\rangle$ (come prima), 0, quando si trova nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta\rangle + |\gamma\rangle)$ e , -1, quando si trova nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta\rangle - |\gamma\rangle)$, dove $|\gamma\rangle$ è lo stato in cui il sistema si trova quando non è né nello stato $|\alpha\rangle$, né nello stato $|\beta\rangle$;

(d) l'operatore di proiezione Π che corrisponde alla situazione iniziale della domanda (3) (ossia: l'oggetto non viene rivelato nella zona 3 dello schermo). Questo operatore è associato ad un'osservabile, e se sì, quale?

In tutti i casi: come si scrive l'operatore associato ad un'osservabile in notazione di Dirac? Come si passa dalla notazione di Dirac alla forma matriciale? Per il caso (d): l'operatore di proiezione è hermitiano?

(10) Si determinino le seguenti matrici di cambiamento di base:

   (a) la matrice che per un singolo qubit fa passare dalla base degli stati $|i\rangle$ alla base degli stati $|\pm\rangle$ della domanda (5);
   (b) la matrice che, nella situazione della domanda (9), fa passare dalla base degli stati $|01\rangle$, $|10\rangle, |11\rangle$ alla base degli stati $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, $|\gamma\rangle$.

   In entrambi i casi: come si fa a determinare le componenti della matrice di cambiamento di base in termini dei vettori di base?

(11) Si consideri la matrice dell'operatore P che esegue una permutazione ciclica degli stati $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ della domanda (1).

   (a) Si scriva la matrice associata all'operatore dato.
   (b) Si determinino autovalori ed autovettori dell'operatore e si discuta il risultato.

   Di che tipo di operatore si tratta?

(12) Per ciascuno dei seguenti operatori, si determini se siano o meno unitari e/o hermitiani:

   (a) l'operatore $\mathcal{H}$ della domanda (5);
   Che cosa succede se lo applico due volte di fila?
   (b) l'operatore O della domanda (8);
   Che tipo di operatore è?
   (c) l'operatore Π della domanda (9) punto (d);
   La misura è reversibile?
   (d) l'operatore P della domanda (11).
   Come sono gli stati ottenuti agendo con questo operatore sui vettori di base?

(13) Per uno stato di due qubit $|ij\rangle$, con i, $j = 0, 1$ si determinino le matrici dei seguenti operatori, e si discuta se siano unitari e/o hermitiani:

   (a) l'operatore che scambia i due qubit (SWAP);
   (b) l'operatore che se il primo qubit vale 0 lascia il secondo qubit invariato, e se il primo qubit vale 1 trasforma il valore del secondo qubit in 0 se esso vale 1 e viceversa (CNOT).

   In entrambi i casi, la trasformazione data è reversibile? Che cosa succede se la si applica due volte?

(14) (a) Determinare, per tutte le coppie di operatori A, B, C e Π della domanda (9) se siano compatibili o meno.
   (b) Nella situazione delle domande (4) e (8), considerare l'operatore associato all'osservabile O', definita analogamente alla O della domanda (8), ma ora rispetto allo stato $|\psi_1\rangle$: ossia O' è definita come l'osservabile che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi_1\rangle$ e 0 quando il sistema non viene rivelato nello stato $|\psi_1\rangle$ (ossia se viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi_1\rangle$.). L'osservabile O' è compatibile con l'osservabile O definita nella domanda (8)?

   In entrambi i casi, qual è la condizione di compatibilità (e qual è il suo significato fisico?)

(15) Considerare gli operatori A, B e Π del problema (9). Se il sistema si trova in un autostato di A,

(a) che risultato producono una misura prima di A e poi di B, oppure prima di B e poi di A?
A e B sono compatibili? In che stato si trova il sistema dopo la misura di un'osservabile?

(b) che risultato producono una misura prima di A e poi di Π, oppure prima di Π e poi di A?

(c) che risultato producono una misura prima di B e poi di Π, oppure prima di Π e poi di B?
A o rispettivamente B e Π sono compatibili? La misura di Π determina l'autostato di A o rispettivamente di B e viceversa?.

(16) Considerare gli operatori A e C del problema (9).

(a) Determinare la relazione di indeterminazione per questa coppia di operatori.
Qual è la forma della relazione di indeterminazione?

(b) Determinare il o gli stati di minima indeterminazione, ossia gli stati per i quali la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza.
A quali condizioni la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza?

(17) Si consideri un sistema di un qubit i cui due stati $|0\rangle$, $|1\rangle$ sono autostati di un'osservabile O che soddisfano le equazioni agli autovalori

$$O|0\rangle = |0\rangle; \qquad O|1\rangle = -|1\rangle. \tag{8}$$

(a) Il sistema viene preparato in un certo stato $|\psi\rangle$, oppure in un altro stato $|\phi\rangle$, e quindi viene effettuata una misura di O. L'operazione (preparazione seguita da misura) è ripetuta più volte. Quando il sistema viene preparato in $|\psi\rangle$ la misura dà sempre come risultato -1, mentre quando il sistema viene preparato in $|\phi\rangle$ la misura dà $+1$ in $\frac{1}{3}$ dei casi, e -1 in $\frac{2}{3}$ dei casi. Scrivere la più generale forma dei vettori di stato $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ nella base computazionale (base degli autostati di O).
Qual è la più generale parametrizzazione di uno stato quantistico?

(b) Da quanti parametri dipende ciascuno dei vettori di stato della domanda precedente, quali e quanti di questi parametri sono inosservabili, e quali invece corrispondono a proprietà misurabili del sistema?
Quali sono i parametri osservabili?

(c) Qual è la probabilità che un sistema preparato nello stato $|\phi\rangle$ venga rivelato nello stato $|\psi\rangle$? Il risultato è univocamente determinato, o dipende da qualcuno dei parametri da cui dipendono $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$?
Da quali parametri dipende il prodotto scalare fra gli stati dati?

(d) Si cosideri un'osservabile P, avente spettro non degenere e tale che lo stato $|\phi\rangle$ della domanda (a) sia autostato di P. Le osservabili O e P sono compatibili? La risposta dipende dal fatto che lo spettro di P sia degenere o meno?
Che succede se lo spettro di P è degenere?

(e) Determinare il valor medio e l'indeterminazione dei risultati delle misure di O in ciascuno dei due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$.
Come si calcola l'indeterminazione?

(f) Determinare il vincolo posto dal principio di indeterminazione sul prodotto delle indeterminazioni delle misure di P e O negli stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. Giustificare il risultato.
Qual è il valore massimo che l'indeterminazione può assumere in uno stato di un qubit?

(g) Costruire uno stato $|\chi\rangle$ tale che il posto dal principio di indeterminazione sul prodotto delle indeterminazioni delle misure di P e O in tale stato sia non-banale (cioè non si riduca alla condizione $0 \geq 0$).
In quali stati l'inderminazione per un dato operatore è diversa da zero?

(18) Considerare un insieme di molti oggetti, ciascuno dei quali può trovarsi in uno dei due stati $|+\rangle$ o $|-\rangle$: ad esempio, un insieme di fotoni, ciascuno dei quali può trovarsi in uno di due stati di polarizzazione. Considerare le seguenti miscele statistiche di N stati ("N fotoni") ($N \gg 1$):

i) $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|+\rangle$ e $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|-\rangle$;

ii) $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|\phi_1\rangle = \cos\theta|1\rangle + \sin\theta e^{i\phi}|2\rangle$ e $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|\phi_2\rangle = -\sin\theta|1\rangle + \cos\theta e^{i\phi}|2\rangle$, dove $|1\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ e $|2\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$;

iii) $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|\chi_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + i\sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$ e $\frac{N}{2}$ fotoni nello stato $|\chi_2\rangle = i\sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$,

iv) $\frac{3}{4}N$ fotoni nello stato $|+\rangle$ e $\frac{1}{4}N$ fotoni nello stato $|-\rangle$,

v) tutti i fotoni nello stato $|\chi_1\rangle$.

(a) Calcolare in tutti i casi le probabilità di trovare i fotoni nello stato $|+\rangle$.
come si calcola la probabilità di una misura per una miscela statistica?

(b) È possibile, attraverso la misura anche ripetuta di qualunque osservabile in questo spazio, distinguere le miscele statistiche *i)* e *ii)*?
qual è la probabilità di trovare uno stato con polarizzazione generica in una delle due miscele?

(c) Determinare in tuttti i casi la matrice densità ρ, nella base degli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$ e verificare se $Tr(\rho^2) = 1$ o meno.
come è definito l'operatore densità? Come si calcola la matrice densità in una base data?

(d) È possibile, attraverso la misura anche ripetuta di qualunque osservabile in questo spazio, distinguere i casi *iii)*, *iv)* e *v)*?
Qual è la più generale misura che si può eseguire su uno stato?

(19) Da quanti parametri dipende la matrice densità per un sistema che si trova in uno stato puro, e da quanti se si trova in uno stato misto

(a) per un sistema di un qubit
Qual è la forma della più generale matrice densità?

(b) per un sistema di due qubit.
Che proprietà deve avere la più generale matrice densità?

(20) Calcolare l'integrale

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda y^2 - x) f(y) dy, \tag{9}$$

dove λ è una costante (a) reale positiva oppure (b) complessa.
Ricordare la definizione della distribuzione delta di Dirac come integrale del prodotto fra delta e una funzione di prova

(21) Definire l'operatore $\mathcal{P}$ (operatore parità) i cui elementi di matrice soddisfano

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x), \tag{10}$$

dove $|\psi\rangle$ è uno stato qualunque e $|x\rangle$ sono autofunzioni della posizione.

(a) Determinare le autofunzioni e gli autovalori di P.
Quanto vale $\mathcal{P}^2$?

(b) Determinare gli elementi di matrice del commutatore $[\mathcal{P}, T]$, dove T è l'operatore traslazione, fra autostati della posizione, ed in particolare discutere se esso si annulli o meno.
Come agiscono $\mathcal{P}$ e T sugli autostati della posizione?

(c) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sull'operatore posizione, ossia determinare $\mathcal{P}^{-1}\hat{x}\mathcal{P}$.
Quanto valgono gli elementi di matrice dell'operatore trasformato fra autostati della posizione?

(d) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sull'operatore traslazione, ossia determinare $\mathcal{P}^{-1}T\mathcal{P}$.
Quanto valgono gli elementi di matrice dell'operatore trasformato fra autostati della posizione?

(e) Determinare gli elementi di matrice $\langle x|\mathcal{P}^{-1}\hat{p}\mathcal{P}|\psi\rangle$, dove $|x\rangle$ è un autostato della posizione, $\hat{p}$ è l'operatore impulso, e $|\psi\rangle$ è uno stato generico
Che relazione c'è fra l'operatore impulso l'operatore traslazione considerato al punto precedente?

(22) Calcolare i seguenti commutatori (si intende che x e p indicano sempre i corrispondenti operatori)

(a) $[x, p^2]$;

(b) $[x^2, p]$;

(c) $[x^2, p^2]$;
Come si calcola il commutatore del prodotto di operatori??

(d) $[p, \exp(\lambda x)]$.
Come si definisce la funzione di un operatore?

(23) Considerare le seguenti trasformazioni:

- *Dilatazioni*: $q \to q' = \lambda q$;
- *Trasformazioni di Galileo*: $q \to \tilde{q} = q - vt; \qquad \tilde{p} = p - mv.$

(a) Nel caso delle dilatazioni, determinare l'operatore impulso p'. Verificare quindi in entrambi i casi che le coordinate ed impulsi trasformati soddisfano le relazioni di commutazione canoniche.
Qual è il generatore delle traslazioni sulle coordinate trasformate? È unico?.

(b) Determinare in entrambi i casi il generatore della trasformazione infinitesima e verificare che è hermitiano.
Ricordare la definizione di aggiunto di un operatore.

(c) Determinare in entrambi i casi la trasformazione finita.
Come si definisce l'esponenziale di un operatore?

(24) Considerare l'operatore $O = \hat{x}\hat{p}^n$ dove $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sono gli operatori posizione e impulso ed n è intero positivo.

(a) Dimostrare che O non è hermitiano e calcolare la differenza $D = O - O^\dagger$.
Come si calcola l'aggiunto di un prodotto di operatori? Si può esprimere D in termini di un commutatore noto?

(b) Calcolare esplicitamente l'elemento di matrice $\langle\psi|O^\dagger|\phi\rangle$ nella base delle coordinate in termini delle funzioni d'onda $\langle x|\phi\rangle = \psi(x)$ $\langle x|\phi\rangle = \phi(x)$, usando la definizione di aggiunto di un operatore. Verificare che coincide con l'elemento di matrice dell'operatore $O + D$, dove

D è stato determinato al punto precedente.
Su che cosa agisce l'operatore $\hat{p}$ quando si calcola l'elemento di matrice di O? E l'elemento di matrice di $O^\dagger$?

(c) Ripetere il calcolo al punto precedente ma ora usando la base degli impulsi.
Che forma ha l'operatore posizione nella base degli impulsi?

(25) Considerare l'operatore parità $\mathcal{P}$ definito nel problema (21), ed il suo commutatore con l'operatore impulso e con l'operatore $|\hat{p}|$ definito come

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar |k| |k\rangle\langle k|; \tag{11}$$

e determinare gli elementi di matrice

(a) $\langle k| [\hat{p}, \mathcal{P}] |\psi\rangle$;
(b) $\langle q| [\hat{p}, \mathcal{P}] |\psi\rangle$;
(c) $\langle k| [|\hat{p}|, \mathcal{P}] |\psi\rangle$;
(d) $\langle q| [|\hat{p}|, \mathcal{P}] |\psi\rangle$,

dove $|k\rangle$ e $|q\rangle$ sono rispettivamente autostati dell'impulso e della posizione, e $|\psi\rangle$ è uno stato generico.
Riusciamo a scrivere il commutatore in termini di elementi di matrice di p negli stati dati, che conosciamo?

(26) Considerare un sistema di un qubit, la cui evoluzione temporale è data dalla Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega \left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right) \tag{12}$$

Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura dell'operatore

$$A = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \tag{13}$$

che dà come risultato l'autovalore $+1$.

(a) Determinare il valor medio e l'indeterminazione di una misura di A ad ogni tempo successivo t. Giustificare la dipendenza o indipendenza dal tempo del risultato.
L'operatore A è diagonalizzabile simultaneamente alla hamiltoniana? Qual è l'espressione dell'autostato dato di A in termini di autostati della hamiltoniana?

(b) Definito inoltre l'operatore

$$B = i \left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right) \tag{14}$$

determinare anche il valor medio e l'indeterminazione di una misura di B ad ogni tempo successivo t.

(c) Verificare che ad ogni tenpo t le indeterminazioni di A e B soddisfano il principio di indeterminazione.
Gli operatori A e B sono diagonalizzabili simultaneamente?

(27) Considerare un sistema di un qubit, la cui evoluzione temporale può essere data da una Hamiltoniana i cui elementi di matrice sono

$$H_1 = E_0\sigma_1, \tag{15}$$

(indipendente dal tempo) oppure dalla hamiltoniana dipendente dal tempo

$$H_2(t) = E_0 t \sigma_1, \tag{16}$$

dove E_0 è una costante reale positiva e σ_1 è una matrice di Pauli.

(a) Determinare esplicitamente l'operatore di evoluzione temporale in entrambi i casi.
Qual è l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale per hamiltoniane che a tempi diversi commutano?

(b) Nel caso della hamiltoniana H_1, se al tempo $t = 0$ il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $A = \sigma_3$, qual è la probabilità che al tempo t esso si trovi nell'altro autostato dello stesso operatore?
Qual è la relazione fra la probabilità richiesta e gli elementi di matrice dell'operatore di evoluzione temporale?

(c) Rispondere di nuovo alla domanda precedente, ma nel caso in cui il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $B = \sigma_2$.
Il risultato è diverso o uguale a quello del caso precedente?

(d) Rispondere di nuovo alla domanda precedente, ma nel caso in cui il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $C = \sigma_1$.
Che cosa succede se il sistema si trova in un autostato della hamiltoniana ?

(e) Utilizzare la risposta alla domanda precedente per calcolare nuovamente la probabilità del punto (b) ma *senza* usare l'espressione esplicita dell'operatore di evoluzione temporale.
Che forma ha lo stato in cui è stato preparato il sistema nella base degli autistati della hamiltoniana?

(28) (a) Dimostrare che in un autostato della hamiltoniana

$$\langle [A, H] \rangle = 0 \tag{17}$$

per qualunque operatore A.
Quanto vale l'elemento di matrice di H in un suo autostato?

(b) Determinare, per uno stato generico, e per una hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}), \tag{18}$$

la dipendenza temporale del valor medio di $\hat{v}$, $\frac{d}{dt}\langle \hat{v} \rangle$, dove $\hat{v}$ è l'operatore viriale

$$\hat{v} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}\right). \tag{19}$$

Come si calcola la dipendenza dal tempo di un elemento di matrice in termini della dipendenza dal tempo degli stati?

(c) Utilizzare i risultati delle domande precedenti per dimostrare che, per un potenziale della forma

$$V(\hat{q}) = \hat{q}^{\alpha}, \tag{20}$$

i valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in un autostato di energia sono proporzionali, e determinare il coefficiente di proporzionalità (*teorema del viriale*).
Come depende dal tempo il valor medio di $\hat{v}$?

(d) Determinare ora la dipendenza dal tempo in rappresentazione di Heisenberg dell'operatore $\hat{v}$ e confrontare con il risultato al punto (b).
Che forma hanno le equazioni del moto di Heisenberg?

(e) Determinare la condizione generale per cui si conservano gli autovalori di $\hat{v}$, e la simmetria associata a questa legge di conservazione.
Qual è la traformazione generata da $\hat{v}$? Ricordare il problema 13.

(29) Considerare il sistema della domanda (4), e supporre che la sua evoluzione temporale sia data dalla hamiltoniana $H = EO$, dove O è l'operatore definito nella domanda (8) ed E è una costante reale positiva.

(a) Determinare la probabilità che il sistema, preparato nello stato $|00\rangle$ al tempo $t = 0$ al tempo $t = T$ sia rivelato nello stato $|01\rangle$.
Qual è l'azione della hamiltoniana sullo stato $|01\rangle$?

(b) Determinare la probabilità che il sistema, preparato nello stato $|00\rangle$ al tempo $t = 0$ al tempo $t = T$ sia rivelato nello stato $|10\rangle$.
Qual è l'espressione dello stato $|10\rangle$ in termini degli autostati della hamiltoniana?

(c) Definire l'operatore associato all'osservabile O'' che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|00\rangle$ ed il valore -1 quando il sistema viene rivelato nello stato $|10\rangle$. Scrivere le equazioni alla Heisenberg per questo operatore.
Qual è l'espressione dell'operatore associato ad O'' in forma matriciale?

(d) Determinare esplicitamente l'operatore alla Heisenberg $O''(t)$ e le sue autofunzioni a qualunque tempo t.
Qual è l'espressione dell'operatore alla Heisenberg a tempo generico?

(30) Considerare la hamiltoniana che descrive il moto di una particella soggetta ad una forza costante (potenziale lineare)

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \kappa\hat{x}. \tag{21}$$

(a) Discutere quali fra i seguenti operatori possano essere diagonalizzati simultaneamente: H, $\hat{x}$, $\hat{p}$, T, V, dove T e V sono rispettivamente gli operatori energia cinetica ed energia potenziale.
Come si calcola il commutatore di una funzione di $\hat{p}$ e $\hat{q}$?

(b) Determinare la dipendenza dal tempo degli operatori T e V in rappresentazione di Heisenberg sia in forma differenziale che integrale. Confrontare con il risultato classico.
Che relazione c'è fra la legge del moto quantistica e quella classica? (teorema di Ehrenfest)

(c) Intepretare il risultato della domanda precedente in termini di proprietà di invarianza della hamiltoniana.

(d) Determinare la a dipendenza dal tempo di $\hat{x}$ e $\hat{p}$ e interpretare il risultato in termini delle proprietà di invarianza della hamiltoniana.
Per entrambe le domande precedenti: quali sono le trasformazioni generate da $\hat{p}$ e da $\hat{q}$?

(31) Considerare una particella libera di massa m in una dimensione, la cui funzione d'onda al tempo $t = 0$ è

$$\psi(x) = \sqrt{\alpha}e^{-\alpha|x|}e^{ikx} \tag{1}$$

con α e k reali, e $\alpha > 0$.

(a) Determinare i valori medi $\langle x\rangle$ e $\langle p\rangle$ di posizione e impulso nello stato dato.
Conviene usare la rappresentazione di Schrödinger o quella di Heisenberg?

(b) Determinare i valori medi $\langle x\rangle$ e $\langle p\rangle$ per ogni tempo t.
Come si fa a scrivere $\langle p\rangle$ in termini di uno o più integrali?

(c) Dimostrare che il valor medio di p^2 nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1) è dato da

$$\langle p^2\rangle = \langle\phi|\phi\rangle, \tag{2}$$

dove lo stato $|\phi\rangle$ è dato da $|\phi\rangle = p|\psi\rangle$.
L'operatore p è hermitiano?

(d) Calcolare l'indeterminazione $\Delta^2 p$ dell'impulso nello stato dato.
Come si scrive l'indeterminazione in termini dello stato $|\phi\rangle$ della domanda precedente?

(e) Determinare anche l'indeterminazione in posizione $\Delta^2 x$ al tempo $t = 0$.
Come si fa a scrivere $\langle x^2 \rangle$ in termini di uno o più integrali?

(f) Confrontare le indeterminazioni treovate con il principio di indeterminazione di Heisenberg. Discutere che cosa succede nel limite $\alpha \to \infty$
Lo stato dato è un pacchetto gaussiano?

(32) Considerare una particella libera che al tempo $t = 0$ si trova nello stato avente funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = N \left[e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2} + e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} \right], \tag{22}$$

con $|N|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{1+e^{-\alpha x_0^2}}$, correttamente normalizzato ad uno.

(a) Determinare la funzione d'onda al tempo $t = 0$ nella base degli impulsi.

(b) Determinare la funzione d'onda al tempo t.
Come si calcola la dipendenza temporale per uno stato generico?

(c) Determinare la la densità di probabilità per misure di posizione al tempo t e interpretarne fisicamente i vari termini.
Ricordare l'esperimento di Zeilinger!

(33) Considerare una particella libera la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0 x} e^{-\alpha x^2/2} \tag{23}$$

dove α e k_0 sono costanti reali positive.

(a) Calcolare l'indeterminazione per una misura di energia.
Qual è la relazione fra energia ed impulso per una particella libera?

(b) Determinare la densità di probabilità per una misura di impulso nel limite in cui $\alpha \to 0$.
Ricordare la rappresentazione della delta di Dirac come successione di gaussiane normalizzate, Eq. (4.23) del testo.

(34) Calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso $\Delta^2 x$ e $\Delta^2 p$ nell n-esimo autostato di energia di una buca di potenziale infinitamente profonda. Confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.

Come si calcolano i valori medi degli operatori x, x^2, p e p^2? Ricordare il metodo di integrazione per parti.

(35) Considerare una sistema in una buca di potenziale infinitamente profonda, avente hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V_0(x) \tag{24}$$

con

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \leq a \\ \infty \text{ se } |x| > a \end{cases}, \tag{25}$$

dove a è una costante reale positiva. Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|1\rangle + i\sqrt{2}|2\rangle \right) \tag{26}$$

dove $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato della hamiltoniana data.

(a) Determinare i possibili risultati di una misura di energia oppure di una misura di impulso per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (26) e le loro probabilità.
Che relazione c'e' fra gli autostati di energia e di impulso per una buca di potenziale?

(b) Determinare i valori medi di posizione, impulso ed energia nello stato $|\psi\rangle$.
Quali degli integrali danno un valore nonnullo e perché?

(c) Determinare i valori medi di posizione ed energia ad ogni tempo t per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (26) al tempo $t = 0$ e la cui evoluzione temporale è governata dalla hamiltoniana H_0. Discutere se essi dipendano dal tempo e perché.
Come evolvono nel tempo gli autostati della hamiltoniana?

(d) Considerare ora la hamiltoniana

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + V_1(x) \tag{27}$$

con potenziale

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } 0 \leq x \leq 2a \\ \infty \text{ se } x > 2a \end{cases} \quad , \tag{28}$$

Determinare la trasformazione che collega gli autostati della hamiltoniana H_0 a quelli della hamiltoniana H_1 ed utilizzare il risultato per determinare lo spettro di autovalori della hamiltoniana H_1 noto quello della hamiltoniana H_0.
Che relazione c'è fra i potenziali delle due hamiltoniane?

(e) Considerare infine un sistema che si trova in uno stato della forma data dalla Eq. (26), ma dove ora la hamiltoniana è H_1 Eq. (28), e $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono il suo stato fondamentale ed il suo primo stato eccitato. Determinare i valori medi di posizione, impulso ed energia in questo stato.
Che relazione c'è fra autovalori ed autostati di operatori unitariamente equivalenti?

(36) Considerare la hamiltoniana unidimensionale avente potenziale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa\,\delta(x), \tag{29}$$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac e κ è un coefficiente reale.

(a) Nel caso in cui $\kappa < 0$ (buca deltiforme), determinare il numero di stati, i relativi autovalori e autofunzioni, e la parità di quest'ultime.
Come è fatta la soluzione quando $x \neq 0$? Che cosa succede nell'origine? Ricordare che $d\theta(x)/dx = \delta(x)$.

(b) Determinare le autofunzioni nel caso di autostati di scattering (stati ad energia positiva), ed in particolare discutere la dipendenza di tali autofunzioni dal segno di κ.
Che cosa cambia rispetto al punto precedente?

(c) Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione nel caso di un'onda piana proveniente da $x = -\infty$ e determinare il valore di energia per cui la probabilità di riflessione è pari a quella di trasmissione.
Come sono definiti i coefficienti di riflessione R e trasmissione T e?.

(37) Considerare un sistema unidimensionale la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \delta x, \tag{30}$$

dove x e p sono gli operatori posizione ed impulso, e δ è un parametro reale. Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}, \tag{31}$$

correttamente normalizzato come $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

(a) Determinare il valore medio di posizione, impulso e l'indeterminazione in impulso ad un tempo t qualunque.
Conviene usare la rappresentazione di Schroödinger o quella di Heisenberg?

(b) Determinare autovalori ed autofunzioni della hamiltoniana. Discutere se lo spettro sia discreto o continuo, se sia degenere o meno, e se le autofunzioni siano normalizzabili in senso proprio o no, e perché.
Conviene usare la base delle posizioni o la base degli impulsi?

(c) Determinare l'operatore di evoluzione temporale $S(t)$ per un sistema governato dalla hamiltoniana data. Dimostrare che esso può essere scritto nella forma

$$S(t) = e^{i\theta} \exp\left[\frac{t}{i\hbar}A(p)\right] \exp\left[\frac{t}{i\hbar}B(x)\right], \tag{32}$$

dove $A(p) = a_1 p^2 + a_2 p$ e $B(x) = bx$, con x e p gli operatori posizione ed impulso, a_1, a_2, b e θ costanti opportune, determinando le costanti a_1, a_2 e b (non occorre determinare θ). Usare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = \exp\left[A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]]\right]. \tag{33}$$

(d) Utilizzare il risultato della domanda precedente per determinare la dipendenza temporale dell'autofunzione di energia.
Come si ottiene l'autofunzione al tempo $t + \delta t$ da quella al tempo t?

(e) Determinare l'andamento delle autofunzioni della hamiltoniana data quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
Quali sono i termini dominanti nell'equazione agli autovalori nei due limiti?

(38) Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana di oscillatore armonico

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{34}$$

(a) Definito l'operatore parità $\mathcal{P}$, tale che

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle, \tag{35}$$

determinare la trasformazione effettuata da questo operatore sugli operatori di creazione e distruzione $a^\dagger$ e a.
Come si scrivono a e $a^\dagger$ in termini di x e p?

(b) Usando il risultato della domanda precedente, dimostrare che se lo stato fondamentale è un autostato della pariotà, allora tutte le autofunzioni

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$$

della hamiltoniana H_0 sono autostati della parità e determinare l'autovalore associato. Spiegare la ragione di questo risultato.
Come si scrivono le funzioni d'onda di stato eccitato in termini dello stato fondamentale?

(c) Dimostrare che $\mathcal{P} = \exp\left(i\pi a^\dagger a\right)$ soddisfa la definizione Eq. (35), dove $a^\dagger$ and a sono operatori di creazione e distruzione.
Come è fatta la decomposizione di uno stato generico in termini degli autostati di oscillatore armonico?

(d) Introdurre ora l'accoppiamento con un campo elettrico, ovvero la hamiltoniana

$$H = H_0 + eEx, \tag{36}$$

dove eE è una costante reale. Determinare lo spettro della hamiltoniana H.
Che relazione c'è fra H e H_0?

(e) Discutere se le autofunzioni di H siano anche autofunzioni di H_0, e perché.
H e H_0 sono compatibili?

(f) Scrivere la funzione d'onda per lo stato fondamentale della hamiltoniana H Eq. (4) in termini dell'azione dell'operatore di traslazione sulla funzione d'onda per lo stato fondamentale della hamiltoniana H_0 Eq. (1).
Come agisce una traslazione sulla Hamiltoniana?

(g) Dimostrare che lo stato fondamentale della hamiltoniana H è autostato dell'operatore di distruzione a relativo alla hamiltoniana H_0, e determinare il corrispondente autovalore.
Come agisce una traslazione sul'operatore a?

(39) Considerare un un sistema unidimensionale soggetto al potenziale armonico

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{37}$$

con ω una costante reale positiva, e supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$, la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\langle x|\psi\rangle = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\gamma x^2}, \tag{38}$$

dove γ è una costante reale positiva, in generale diversa da ω. Lo stato dato soddisfa la condizione di normalizzazione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

(a) Determinare i valori medi degli operatori x, p, x^2 e p^2 nello stato dato ad ogni tempo t.
Che cosa dice il teorema di Ehrenfest?

(b) Determinare la probabilità che una misura di energia del sistema dato dia come risultato l'energia del suo stato fondamentale.
Qual è la funzione d'onda di stato fondamentale?

(c) Determinare nuovamente i valori medi della domanda precedente ad ogni tempo t se la misura del punto precedente viene eseguita, con il risultato dato, al tempo $t = 0$.
Come dipende dal tempo il valor medio di un operatore in uno autostato dell'energia (stato stazionario)?

(d) Calcolare il prodotto delle indeterminazioni di posizione ed impulso per il sistema dato a qualunque tempo t.
Qual è l'espressione dell'indeterminazione?

(e) Dimostrare che esiste un valore di γ che minimizza tale prodotto a qualunque tempo t e determinare tale valore. Giustificare il risultato.
Quali sono gli stati di minima indeterminazione?

(40) Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_\lambda = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\lambda \left(a + a^\dagger\right), \tag{39}$$

dove ω e λ sono costanti reali e positive e a è un operatore tale che

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1. \tag{40}$$

(a) Dimostrare che la hamiltoniana data può essere riscritta nella forma

$$H_\lambda = \hbar\omega \bar{a}^\dagger \bar{a} + K, \tag{41}$$

dove

$$\bar{a} = a + \delta \tag{42}$$

e δ e K sono numeri reali, e determinare il valore di questi numeri.
Che relazione c'è fra l'hamiltoniana scritta in termini di a, $a^\dagger$ e di $\bar{a}$, $\bar{a}^\dagger$?

(b) Determinare il commutatore $[\bar{a}, \bar{a}^\dagger]$ e utilizzare il risultato per determinare lo spettro di autovalori della hamiltoniana H_λ Eq. (39).
Che relazione c'è fra H_λ e l'operatore numero?

(c) Supporre ora che il termine proporzionale a λ nella Eq. (39) venga acceso al tempo $t > 0$, ossia che la hamiltoniana dipenda dal tempo nel modo seguente:

$$H(t) = \begin{cases} H_0 & t \leq 0; \\ H_\lambda & t > 0. \end{cases}, \tag{43}$$

dove H_λ è la hamiltoniana Eq. (39) , e H_0 è data da

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a. \tag{44}$$

Al tempo $t = 0$ (cioè subito prima che venga acceso il termine in λ) viene eseguita una misura di energia sul sistema che dà come risultato $E = 0$. Determinare il valore medio e l'indeterminazione degli operatori x e p definiti in termini degli operatori $\bar{a}$ e $\bar{a}^\dagger$ da

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\bar{a} + \bar{a}^\dagger\right), \qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\bar{a}^\dagger - \bar{a}\right). \tag{45}$$

Discutere se il sistema si trovi in uno stato di minima indeterminazione e perché.
A che stato corrisponde l'autovalore E=0?

(d) Dimostrare che lo stato in cui si trova il sistema subito dopo la misura del punto precedente è un autostato dell'operatore $\bar{a}$ Eq. (42) e determinare il corrispondente autovalore.
Che relazione c'è fra i valori medi di x, p ed $\bar{a}$?

(e) Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per l'operatore $a(t)$, ed utilizzare il risultato per determinare la dipendenza dal tempo dell'operatore $\bar{a}(t)$ Eq. (42)
Che relazione c'è fra la legge del moto di $\bar{a}(t)$ e quella del consueto operatore di distruzione?

(f) Determinare il valor medio degli operatori x e p, Eq. (45), per ogni tempo $t > 0$.
Che relazione c'è fra le leggi del moto di $\bar{a}(t)$ $\bar{a}^\dagger(t)$ e quelle di $x(t)$ e $p(t)$?

(g) Determinare la probabilità che il sistema preparato dalla misura del punto (c) venga rivelato nell'n-esimo autostato di energia della hamiltoniana Eq. (1) al tempo $t > 0$. Il risultato dipende dal tempo?
Come dipende dal tempo la probabilità di rivelare un sistema invariante per traslazioni temporali in un autostato della hamiltoniana?