PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

SECONDA PARTE
anno accademico 2022-2023

(1) Per un sistema meccanico d-dimensionale determinare:

(a) gli elementi di matrice dell'operatore posizione $\vec{x}$ e dell'operatore impulso $\vec{p}$ tra autostati dell'impulso $|\vec{p}\rangle$;
qual è l'operatore che genera la trasformazione $k_i \to k_i + delta$, dove k_i è l'i-esima componente dell'impulso?

(b) le autofunzioni dell'operatore posizione nella base degli autostati dell'impulso $\langle\vec{k}|\vec{x}\rangle$;
le condizioni di autostato rispetto alle diverse componenti dell'impulso sono indipendenti?

(c) la relazione tra le espressioni di un vettore di stato generico $|\psi\rangle$ nella base degli autostati della posizione e nella base degli autostati dell'impulso.
idem: il cambio di base tra autofunzioni della posizione e dell'impulso lungo ciascuna dimensione dipende dalle altre dimensioni?

(2) In uno spazio d-dimensionale:

(a) determinare il generatore della trasformazione $\vec{k} \to \vec{k} + \hat{n}$, dove $\vec{k}$ è un vettore impulso, e $\hat{n}$ è un qualunque versore (vettore di norma uno), ed esprimere il risultato in termini dell'operatore posizione d-dimensionale $\hat{\vec{x}}$ nello spazio degli impulsi;
Che differenza c'è fra questo caso e quello della domanda precedente?

(b) scrivere l'operatore che realizza la trasformazione finita discussa al punto precedente, prima in termini del generatore, e poi esplicitamente nella base degli autostati dell'impulso.
Che relazione c'è tra trasformazione finita ed infinitesima?

(3) Considerare un sistema di due particelle di ugual massa m in una dimensione la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + eE_1x_1 + eE_2x_2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)x_1x_2\right] \tag{1}$$

dove x_i, p_i sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle.

(a) Nel caso $\omega_1 = \omega_2$ e $E_1 = E_2 = 0$ determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana data.
Di che hamiltoniana si tratta? Come è fatto lo spettro di una hamiltoniana separabile? Come è definita la degenerazione?

(b) Determinare la funzione d'onda di stato fondamentale della hamiltoniana data, nelle condizioni della domanda precedente.
Come è fatta la funzione d'onda di una hamiltoniana separabile?

(c) Determinare ora lo spettro e la degenerazione nel caso $\omega_1 = \omega_2$ ma $E_1 \neq E_2 \neq 0$.
Si riece a riscrivere la hamiltonana in termini di una hamiltoniana nota?

(d) Considerare ora il caso $\omega_1 \neq \omega_2$ ma $E_1 = E_2 = 0$. Determinare esattamente lo spettro della hamiltoniana eseguendo una trasformazione di coordinate $x'_i = V_{ij}x_j$ che permetta di separare il problema.
Pensando a x^i come vettore colonna, qual è la trasformazione che separa il problema?

(4) Considerare un sistema di tre particelle di ugual massa m su un segmento di lunghezza L, ciascuna delle quali interagisce con i primi vicini, e con le due particelle più esterne che interagiscono con un estremo fisso, tutte attraverso un potenziale armonico con costante elastica k. Il potenziale per il sistema è dunque dato da

$$V(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}k^2 \left(y_1^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + y_3^2\right), \tag{1}$$

dove $y_i = x_i - x_i^{(0)}$ sono gli spostamenti delle tre particelle dalla posizione di equilibrio $x_i^{(0)} = i\frac{L}{4}$.

(a) Disaccoppiare la Hamiltoniana mediante un'opportuno cambio di coordinate.
Che condizioni deve soddisfare il cambio di coordinate?

(b) Determinare lo spettro della hamiltoniana e discutere la sua degenerazione.
Che relazione c'è fra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (1)?

(5) Considerare una sistema di due particelle unidimensionali, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2\right) + \hbar\lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) \tag{2}$$

dove a_i è un operatore che agisce sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{3}$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{4}$$

per ogni i, j.

(a) determinare la più generale trasformazione lineare degli operatori a_i che preserva le relazioni di commutazione;
Che condizione deve soddisfare la trasformazione?

(b) utlizzare il risultato del punto precedente per determinare lo spettro della hamiltoniana.
Che relazione c'è tra gli autovalori di energia e la hamiltoniana scritta nella forma Eq. (2)?

(6) (a) Dimostrare che l'energia cinetica per un sistema di due corpi $T = \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2$ in termini dell'impulso totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, dell'impulso relativo $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$, della massa totale $M = m_1 + m_2$ e della massa ridotta $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ prende la forma $T = \frac{1}{2M}\vec{P}^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2$.
Si può fare la stessa manipolazione che nel caso classico?

(b) Discutere se il passaggio a coordinate baricentrali e relative sia l'unico che separa un problema centrale.
Quali condizioni deve soddisfare il cambio di coordinate?

(7) Considerare una coppia di particelle in tre dimensioni aventi la stessa massa m e cariche elettriche q_1 e q_2, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - q_1\vec{E}\cdot\vec{x}_1 - q_2\vec{E}\cdot\vec{x}_2, \tag{5}$$

dove $\vec{x}_i$ e $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle, e $\vec{E}$ (campo elettrico) è un vettore (costante) di numeri reali.

(a) Separare l'hamiltoniana in una parte baricentrale ed una parte relativa e dimostrare che commutano.
Qual è l'espressione delle coordinate baricentrali e relative? Quali sono le loro regole di commutazione?

(b) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare le equazioni del moto in rappresentazione di Heisenberg (senza risolverle) per gli operatori posizione ed impulso e per l'operatore

$$\vec{D} = q_1 \vec{x}_1 + q_2 \vec{x}_2, \tag{6}$$

(momento di dipolo elettrico).
Quanto valgono i commutatori di tutte le variabili date con la hamiltoniana?

(c) Nel caso $q_1 = q_2$, determinare il valor medio di una misura del momento di dipolo al tempo t in termini di opportune condizioni iniziali al tempo $t = 0$, specificando quante e quali condizioni iniziali sono necessarie per determinare completamente il risultato.
Da che coordinate canoniche dipende il momento di dipolo in questo caso?

(8) (a) Per un sistema *bidimensionale*, determinare l'operatore (hermitiano) impulso radiale, ed determinare l'operatore energia cinetica esplicitamente in coordinate polari (r, θ),

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(b) Dimostrare che in d dimensioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\dagger} = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d-1}{r}\right) \tag{8}$$

attraverso il calcolo dell'elemento di matrice $\langle\psi|\tilde{p}_r|\phi\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate, dove $\tilde{p}_r = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$.
Qual è l'espressione dell'elemento di volume in d dimensioni?

(c) Separare l'operatore cinetico in d dimensioni in parte radiale e parte angolare, sfruttando l'espresione del laplaciano in d dimensioni

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2}, \tag{9}$$

dove L^2 è un operatore che agisce solo sulle variabili angolari.
Qual è l'espressione della derivata radiale?

(9) Considerare una trasformazione generale di coordinate in d dimensioni $\vec{x} \to \vec{\xi}$, con $\xi_i = \xi_i(x_j)$. Determinare l'espressione della delta di Dirac d dimensionale $\delta^{(d)}(\vec{\xi} - \vec{\alpha})$, dove $\vec{\alpha}$ è un vettore (costante) d-dimensionale in termini della delta di Dirac $\delta^{(d)}(\vec{x})$, definita come

$$\delta^{(d)}(\vec{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n), \tag{10}$$

dove $x_1, \ldots, x_d$ sono le d componenti del vettore $\vec{x}$.
Come si trasforma la delta unidimensionale sotto un cambio di coordinate?

(10) Considerare un sistema avente hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\kappa}{2I}(\vec{L})^2 + \hbar\vec{B}\cdot\vec{L} \tag{11}$$

dove sono gli operatori di momento angolare, I e κ sono costanti reali positive, e $\vec{B}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali (non necessariamente positive).

(a) Determinare lo spettro dell'hamiltoniana data e la sua degenerazione, sia quando $\vec{B} = 0$ che quando $\vec{B} \neq 0$.
Qual è lo spettro del momento angolare?

(b) Scrivere le equazioni di Heisenberg per gli operatori $\vec{L}$, $\vec{x}$ e $\vec{p}$, dapprima nel caso in cui $\kappa = 0$ e quindi nel caso generale in cui $\kappa \neq 0$.
Che relazioni di commutazione soddisfa $\vec{L}$?

(11) Considerare gli autostati del momento angolare $|lm\rangle$.

(a) Calcolare il valor medio in un autostato generico degli operatori L_x, L_y, L_x^2 ed L_y^2.
Come si esprimono gli operatori L_i in termini di operatori di innalzamento e abbassamento?

(b) Definire le matrici $(2l+1) \times (2l+1)$

$$\bar{L}^i_{mm'} \equiv \langle lm|L^i|lm'\rangle \tag{12}$$

e calcolare la traccia del prodotto di due di queste matrici, $\mathrm{Tr}(\bar{L}^i\bar{L}^j)$, con $i \neq j$.
Che relazione di commutazione soddisfano le L_i?

(12) Determinare la dipendenza dal tempo del valor medio delle tre componenti del momento angolare $\langle L^i\rangle$ in uno stato qualunque per un sistema avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}). \tag{13}$$

Come si calcola la dipendenza dal tempo di un valor medio? Quanto vale il commutatore del momento angolare con la Hamiltoniana?

(13) Determinare ad ogni tempo t il valor medio del vettore posizione $\langle\vec{x}\rangle$ e del vettore impulso $\langle\vec{p}\rangle$ per un sistema che al tempo zero ha

$$\langle\vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \langle\vec{p}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

e la cui dinamica è descritta dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \vec{B}\cdot\vec{L}, \tag{15}$$

dove $\vec{B}$ è il vettore costante

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Che trasformazione è l'evoluzione temporale per la hamiltoniana data?

(14) Considerare un operatore $\vec{v}$ che soddisfa le relazioni

$$[L_i, v_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}v_k\,. \tag{17}$$

(a) Dimostrare che l'operatore

$$v_i' = e^{-i\phi L_x/\hbar}v_i e^{i\phi L_x/\hbar} \tag{18}$$

è l'operatore v_i ruotato di un angolo ϕ attorno all'asse x.
Come si calcola l'espressione data? (Formula BCH).

(b) Dimostrare che

$$e^{i\pi L_x/\hbar}|l,m\rangle = |l,-m\rangle. \tag{19}$$

Come agisce l'operatore $e^{i\pi L_x/\hbar}$ su L_z?

(c) Mostrare che l'operatore $e^{i\pi\frac{L_x}{2\hbar}}e^{-i\pi\frac{L_y}{\hbar}}e^{-i\pi\frac{L_x}{2\hbar}}$ può essere scritto come l'operatore di rotazione attorno all'asse z di un angolo ϕ. Determinare ϕ.
Come agisce l'operatore $e^{i\phi/2L_x/\hbar}$ su L_y?

(15) Considerare un sistema che al tempo $t = 0$ si trova in uno stato con momento angolare totale $l = 1$, nella seguente sovrapposizione di stati $|lm\rangle$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1-1\rangle - |11\rangle\right). \tag{20}$$

L'evoluzione temporale di questo sistema è data dalla hamiltoniana

$$H = -\omega L_z. \tag{21}$$

(a) Calcolare la probabilità che ad un tempo t qualunque il sistema venga rivelato in uno dei seguenti tre stati

$$|\psi_1\rangle = |\psi\rangle \tag{22}$$
$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1-1\rangle + |11\rangle\right) \tag{23}$$
$$|\psi_3\rangle = |10\rangle \tag{24}$$

e determinare per quali valori del tempo n t ciascuna di queste probabilità è pari ad 1.
Come agisce l'operatore di evoluzione temporale sullo stato dato?

(b) Calcolare ad ogni tempo t il valore medio dell'operatore momento di dipole elettrico $\vec{D} = e\vec{L}$, dove $\vec{L}$ è l'operatore momento angolare.
Che forma hanno le equazioni di Heisenberg per il sistema dato?

(c) Considerare lo stato con $l = 1$ che è anche autostato della componente del momento angolare lungo un generico asse $\vec{n}$, ossia lo stato $|\vec{n}\rangle$ tale che

$$L^2|\vec{n}\rangle = 2\hbar^2|\vec{n}\rangle \tag{25}$$
$$\vec{n}\cdot\vec{L}|\vec{n}\rangle = \hbar|\vec{n}\rangle. \tag{26}$$

Determinare la probabilità di rivelare il sistema dato in questo stato a qualunque tempo t. Dimostrarre che questa probabilità è periodica nel tempo e determinarme il minimo, il massimo ed il periodo. Per semplicità supporre che il vettore $\vec{n}$ giaccia nel piano xy.
Qual è l'espressione dello stato $\vec{n}\rangle$ in termini di autostati del momento angolare?

(16) Considerare uno stato $|0\rangle$ avente funzione d'onda

$$\langle\vec{x}|0\rangle = \psi_0(\vec{x}) = f(r), \tag{27}$$

con $r = |\vec{x}|$, ed i tre stati $|i\rangle$ aventi funzione d'onda

$$\langle\vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x}) = x^i\psi_0(\vec{x}). \tag{28}$$

(a) Dimostrare che $\psi_0(\vec{x})$ è un autostato di tutte le componenti L^i del momento angolare e dunque anche di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.
Che trasformazione genera L_i, e come si trasforma r sotto questa trasformazione?

(b) Dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ è un autostato di L_i e determinare l'autovalore corrispondente.
Che trasformazione genera L_i, e come si trasforma x^i sotto questa trasformazione?

(c) Calcolare il commutatore $[L_i, [L_i, x^j]]$ ed utilizzare il risultato per dimostrare che $\psi_i(\vec{x})$ sono tutti autostati di L^2 e determinare l'autovalore corrispondente.
Quanto vale il commutatore di L_i con x^j?

(17) Considerare lo spazio degli stati fisici avente per vettori di base i tre stati $|i\rangle$ Eq. (28).

(a) Determinare le matrici che rappresentano gli operatori di momento angolare L^i in questo spazio, ossia

$$L^i_{jk} = \langle j|L^i|k\rangle. \tag{29}$$

Quanto vale il commutatore di L^i con x^j?

(b) Diagonalizzare l'operatore $L_z \equiv L^3$ in questo spazio e determinare la matrice di passaggio fra la base degli stati Eq. (28) e la base in cui L_z è diagonale.
Come è fatta la matrice di cambio di base?

(c) Determinare gli elementi di matrice di tutt'e tre gli operatori L^i nella base in cui L_z è diagonale *senza* usare la matrice di cambiamento di base determinata al punto precedente, ma sfruttando le relazioni di commutazione fra ghli operatori L^i.
Come si esprimono L^i in termini di $L_\pm$?

(d) Determinare in questa base gli autostati dell'operatore $\vec{n} \cdot \vec{L}$, dove $\vec{n}$ è un asse qualunque, in termini degli angoli θ, ϕ che determinano la direzione di $\vec{n}$.
Qual è la forma della matrice $\vec{n} \cdot \vec{L}$?

(18) Considerare la proiezione del momento angolare lungo un asse generico $\vec{n}$, $L_n = \vec{L} \cdot \vec{n}$ (dove $|\vec{n}| = 1$).

(a) Dimostrare che su un qualunque stato $|lm\rangle$ tale per cui $l = 1$ vale la seguente relazione (identità di Hamilton-Cayley):

$$(L_n^3 - \hbar^2 L_n)|lm\rangle = 0. \tag{30}$$

Si scelga la base di autostati di L_n

(b) Dimostrare che se $|\psi\rangle$ è un autostato di L_n allora il valor medio delle componenti di $\vec{L}$ nel piano ortogonale ad $\vec{n}$ è nullo.
Si consideri il caso in cui l'asse z è diretto lungo $\vec{n}$

(c) Determinare il valor medio di L_i in ciascuno degli stati $|\psi_i$ Eq. (28).
Prendere $\vec{n}$ lungo uno qualunque degli assi ed utilizzare il risultato delle domande precedenti.

(d) Come è possibile che gli stati ψ_i siano autostati di L_i senza violare il principio di indeterminazione?
Qual è il vincolo imposto dal principio di indeterminazione su questi stati?

(19) Considerare un stato $|\psi\rangle$ al tempo $t = 0$ tale che

$$L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle \tag{31}$$

$$\frac{L_x + L_y}{\sqrt{2}}|\psi\rangle = \hbar|\psi\rangle\,. \tag{32}$$

(a) Determinare $|\psi\rangle$.
Qual è l'espressione di $|\psi\rangle$ nella base degli autostati di L^2 e L_z?

(b) Sia $H = \alpha L^2 + \beta L_z$, con α e β parametri reali. Determinare, al tempo t generico, $|\psi, t\rangle$ e $\langle L_i\rangle_t$.
Quali sono le equazioni del moto alla Heisenberg per L_i?

(20) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$ (ossia un qubit), soggetto alla hamiltoniana

$$H = B\hat{s}_z. \tag{33}$$

Al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di spin lungo l'asse x.

(a) Determinare lo stato del sistema ad ogni tempo t, espresso nella base degli autostati di $\hat{s}_z$.
Come si trasforma lo stato?

(b) Determinare il valor medio dello spin $\vec{s}(t) = \langle\hat{\vec{s}}\rangle$ ad ogni tempo t. Confrontare il risultato con quello del punto precedente e con il risultato del problema 13.
Come si trasforma σ^i?

(c) Determinare la matrice $M_{ij}(t)$ tale che

$$s^i(t) = M_{ij}(t)s^j(0) \tag{34}$$

che lega $\vec{s}(t)$ al valore iniziale $\vec{s}(0)$.
Di che matrice si tratta?

(21) Considerare un sistema di spin $\frac{1}{2}$.

(a) Determinare la matrice dell'operatore spin lungo una direzione $\vec{n}$ qualunque nella base degli autostati di s_z, , in termini degli angoli θ, ϕ che determinano la direzione di $\vec{n}$.
Che forma hanno le matrici di Pauli?

(b) Determinare nella stessa base l'operatore di proiezione dello spin lungo $\vec{n}$.
Come è fatto un operatore di proiezione?

(c) Utilizzare il risultato delle domande precedenti per determinare, sempre nella stessa base, gli autostati dello spin lungo $\vec{n}$.
Che relazione c'è fra operatore di proiezione e autostati?

(d) Supporre che un sistema che si trova in uno dei due autostati del punto precedente al tempo $t = 0$ evolva nel tempo secondo la hamiltoniana Eq. (33). Determinare lo stato del sistema ad un tempo qualunque t.
Come agisce l'evoluzione temporale sul vettore $\vec{n}$?

(22) Determinare i coefficienti di Clebsch-Gordan per la composizione di uno spin $\frac{1}{2}$ ed uno spin $\frac{3}{2}$.
Qual è il valore massimo dello spin totale? In quanti modi si può realizzare $s_z = 1$ totale?

(23) Considerare un sistema di due particelle aventi rispettivamente spin $\frac{1}{2}$ e spin $\frac{3}{2}$, la cui dinamica è data dalla hamiltoniana

$$H = \alpha\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2. \tag{35}$$

(a) Determinare gli autostati della hamiltoniana in termini degli autostati $|s_1 s_1^z s_2 s_2^z\rangle$ dello spin delle due particelle.
Qual è la base degli autostati della hamiltoniana?

(b) Se il sistema al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|s_1 s_1^z s_2 s_2^z\rangle = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$ qual è la probabilità di rivelarlo nello stato $|s_1 s_1^z s_2 s_2^z\rangle = |\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle$ a qualunque altro tenpo t?
Su quale base si diagonalizza l'evoluzione temporale?

(24) Sia dato un sistema di due particelle con spin, con in generale diversi valori dello spin, che interagiscono attraverso la hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) + B_1\vec{L} \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) + B_2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{36}$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare relativo del sistema di due particelle.

(a) Separare completamente il problema.
In che base si separa la hamiltoniana?

(b) Supponendo noto e non-degenere lo spettro dell'hamiltoniana radiale, determinare lo spettro di H e la sua degenerazione quando una delle due particelle ha spin $\frac{1}{2}$ e l'altra ha spin 1.
Che cosa determina la degenerazione degli autostati di momento angolare?

(c) Rispondere nuovamente alla domanda precedente, ma ora nel caso in cui entrambe le particelle hanno spin 1.
Che cosa cambia rispetto al caso precedente?

(25) Considerare la funzione d'onda

$$\psi_\ell(\vec{x}) = d_{ij\ldots k} x_i x_j \ldots x_k \tag{37}$$

completamente simmetrica sotto lo scambio di qualunque coppia di indici, e tale che la traccia su qualunque coppia di indici i, j si annulli, ossia tale che

$$\sum_{i=1}^{3} d_{i_1\ldots i\ldots i\ldots i_\ell} = 0 \tag{38}$$

per ogni possibile scelta di indici sommati.

(a) Determinare l'azione degli operatori $\vec{p}^2$ e p_r^2 (quadrato dell'impulso totale e dell'impulso radiale) sulla funzione d'onda data;
Come agiscono gli impulsi totale e radiale visti come operatori differenziali?

(b) utilizzare il risultato per dimostrare che la funzione d'onda data è un'autofunzione del momento angolare orbitale totale

$$L^2 \psi_\ell(\vec{x}) = \hbar^2 \ell(\ell+1)\psi_\ell(\vec{x}), \tag{39}$$

dove ℓ è il numero di indici di $d_{ij\ldots k}$.
Che relazione c'è fra quadrato dell'impulso totale, radiale, e momento angolare?

(c) Discutere la relazione tra l'autovalore trovato e le regole di composizione dei momenti angolari.
Qual è il massimo valore del momento angolare se si combinano ℓ stati di momento angolare uno?

(26) Condiderare un oscillatore armonico isotropo in coordinate sferiche.

(a) Determinare la funzione d'onda di stato fondamentale (a meno della normalizzazione).
Che condizione soddisfa lo stato fondamentale?

(b) Determinare la forma generica delle funzioni d'onda di stato eccitato.
Come si ottengono gli stati eccitati?

(27) Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2 \tag{40}$$

$$H_1 = \hbar\omega a_1^\dagger a_1; \qquad H_2 = \hbar\omega a_2^\dagger a_2 \tag{41}$$

e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{42}$$

per ogni i, j, mentre

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{43}$$

(a) Definire i tre operatori

$$j^a = \frac{\hbar}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{44}$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j, e determinare le relazioni di commutazione $[j^a, j^b]$ fra qualunque coppia di questi operatori. Normalizzare le matrici di Pauli in modo che abbiano autovalori ± 1.
Come commutano fra loro le matrici di Pauli?

(b) Determinare quali degli operatori j^a possono essere diagonalizzati simultaneamente alla hamiltoniana H_0.
Le relazioni di commutazione del punto precedente a che cosa corrispondono?

(c) Scrivere gli autostati della hamiltoniana H_0 Eq. (1) nella base in cui sono diagonali H_1 e H_2 in termini degli autostati di H_1 e H_2. Dimostrare che in questa base è anche diagonale l'operatore j^3 e determinarne lo spettro.
Qual è l'espressione di j^3?

(d) Definire

$$h_0 = \frac{H_0}{\hbar \omega} \tag{45}$$

e dimostrare l'identità

$$(j^1)^2 + (j^2)^2 + (j^3)^2 = \frac{h_0}{2} \left(\frac{h_0}{2} + 1 \right) \tag{46}$$

e utilizzare il risultato per determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana data.
Di che spettro si tratta?

(e) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + V, \tag{47}$$

dove

$$V = \hbar \lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right). \tag{48}$$

Determinare lo spettro e la degenerazione (supponendo λ ed ω incommensurabili) della hamiltoniana H e interpretare il risultato in termini delle simmetrie del problema. Confrontare con il problema (5).
Come cambia la simmetria del problema in conseguenza dell'aggiunta del termine V?

(f) Supporre che il sistema la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana H si trovi al tempo $t = 0$ nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_0, ed inoltre che si trovi in un autostato di j_3 con autovalore $+\frac{\hbar}{2}$. Determinare la probabilità che al tempo t esso venga rivelato in un autostato di j_3 con autovalore $-\frac{\hbar}{2}$.
Qual è l'espressione del potenziale V in termini degli operatori j^a

(g) Dimostrare che esiste un operatore hermitiano J tale che, definito $R(\theta) = \exp i\theta J$, si ha

$$A_i = R(\theta) a_i R^{-1}(\theta), \tag{8}$$

dove $a_i^\dagger$, a_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H_0 Eq. (1) mentre $A_i^\dagger$, A_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H Eq. (6), e determinare J e θ. Notare che il risultato può essere ottenuto senza eseguire alcun calcolo.
Quali operatori possono essere diagonalizzati simultaneamente a H e quali simultaneamente ad H_0?

(28) (a) Per un oscillatore armonico tridimensionale, dimostrare che in un autostato di energia i valori medi di energia cinetica e potenziale sono uguali $\langle T\rangle = \langle V\rangle$, confrontando la dipendenza dai parametri m ed ω dell'autovalore di energia e dell'hamiltoniana.
Come dipende dai parametri l'autovalore?

(b) Utilizzare il risultato per calcolare il prodotto dell'indeterminazione di $|\vec{x}|^2$ and $|\vec{p}|^2$ in un autostato di energia e confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.
Che relazione c'è fra T, V e le indeterminazioni richieste?

(29) Considerare una Hamiltoniana della forma $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$.

(a) Determinare il generatore delle dilatazioni delle coordinate.
Che relazione c'è fra i; generatore unidimensionale e quello tridimensionale?

(b) Determinare la trasformazione infinitesima sotto dilatazioni della Hamiltoniana, e dei suoi elementi di matrice in un autostato di energia.
Quanto vale il commutatore della Hamiltoniana con un operatore qualunque in uno stato stazionario?

(c) Utilizzare il risultato della domanda precedente per mettere in relazione la trasformazione sotto dilatazioni dei valori medi in un autostato di energia degli operatori energia cinetica es energia potenziale (teorema del viriale). Considerare sia il caso generale che il caso in cui

$$V(\vec{x}) = \lambda r^{-\alpha}, \tag{49}$$

con $r = |\vec{x}|$ e λ una costante reale.

Come si ottiene la trasformazione del valor medio in termini del generatore della trasformazione?

(d) Utilizzare il risultato della domanda precedente determinare la dimensionalità del termine cinetico e del termine di potenziale in unità di lunghezza.
Che relazione c'è fra la dimensione e le proprietà di trasformazione sotto dilatazioni?

(e) Utilizzare il risultato delle due domande precedenti per determinare la dipendenza degli autovalori di energia dai parametri del problema, m, λ e α per gli stati legati di un sistema con potenziale Eq. (49). Nel caso $\alpha = -2$ confrontare con il risultato del problema precedente, punto (a).
Che relazione c'è fra T, V e r?

(f) Utilizzare il risultato della domanda precedente per dimostrare che se $\alpha > 2$ lo spettro della Hamiltoniana non è limitato inferiormente.
Come si comportano l'energia cinetica e potenziale per stati localizzati in un intorno sempre più piccolo dell'origine?

(30) Considerare un atomo di idrogeno immerso in un campo magnetico, la cui hamiltoniana è data da

$$H = H_0 - \omega L_z\,,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno e $\omega = \frac{eB}{2mc}$ è un accoppiamento con un campo magnetico di intensità B diretto lungo l'asse z.

(a) Dimostrare che gli autostati $|nlm\rangle$ dell'atomo di idrogeno sono anche autostati di questa hamiltoniana, e determinare lo spettro di autovalori di energia e la degenerazione.
Che cosa cambia l'accoppiamento col campo magnetico?

(b) Suppponendo che al tempo $t = 0$ la particella si troi nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle\right)$, Determinare la probabilità di trovare il sistema al tempo t negli stati $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,{-1}\rangle - |211\rangle\right)$; $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,1\,{-1}\rangle + |211\rangle\right)$; oppure $|\phi_3\rangle = |210\rangle$. Qual è l'interpretazione fisica di questi stati?.
Usare la rappresentazione di Schrödinger.

(c) Per lo stato dato al punto precedente, determinare il valor medio dell'operatore momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = \frac{e}{3mc}\vec{L}$ ad ogni tempo t.
Usare la rappresentazione di Heisenberg.

(31) Considerare un atomo di idrogeno nello stato fondamentale.

(a) Determinare il valor medio di r^k.
Come è definita la funzione Gamma (fattoriale)?

(b) Determinareil valor medio della posizione radiale, la sua varianza, il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica. Confrontare con il punto (c) del problema precedente.
Come dipendono da r queste quantità?

(c) Determinare la distribuzione di probabilità di impulso.
Come si ottiene la funzione d'onda nell spazio degli impulsi.

(d) Determinare il valor medio dell'impulso $\vec{p}$.
Come sono legati l'impulso in coordiate cartesiane e quello in coordinate sferiche?

(32) Considerare un sistema di due particelle in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{1}{2}m_1\omega^2\vec{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}\omega^2\vec{x}_2^2 + m_2\omega^2\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 \tag{50}$$

(a) Separare il moto del baricentro dal moto relativo e determinare lo spettro del sistema.
A che cosa corrispondono le hamiltoniane del baricentro e relativa?

(b) Supporre che la particella di massa m_1 abbia spin $\frac{1}{2}$ e quella di massa m_2 sia priva di spin. Determinare lo spettro della hamiltoniana

$$H_1 = H_r + \lambda\vec{J} \cdot \vec{S}, \tag{51}$$

dove H_r è la hamiltoniana del moto relativo della domanda precedente, $\vec{S}$ è lo spin totale, e $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, dove $\vec{L}$ è il momento angolare del moto relativo.
Su quale base la hamiltoniana H_1 è diagonale e da quali numeri quantici dipendono i suoi autovalori?.

(c) Determinare nello stato fondamentale della hamiltoniana Eq. (1) il valore della distanza fra le due particelle per cui la densità di probabilità di posizione $\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2)d^3x_1d^3x_2$ è massima.
Si possono scegliere le coordinate in modo che la distanza relativa sia una di esse?

(33) Considerare un oggetto classico puntiforme di massa m che al tempo $t = 0$ si trova in $\vec{x}$ ed al tempo T si trova in $\vec{x}'$.

(a) Determinare l'azione classica in funzione di $\vec{x}$, $\vec{x}'$, T, nel caso libero.
Che cosa si conserva nel moto classico?

(b) Ripetere il calcolo del punto precedente nel caso di potenziale armonico, in una dimensione.
Che forma hanno le leggi del moto classiche in termini delle condizioni iniziali e finali date?

(c) Calcolare in entrambi i casi la derivata dell'azione rispetto a $\vec{x}'$ e verificare che essa fornisce il valore dell'impulso $\vec{p}(T)$.

(34) Considerare una particella libera accoppiata ad un campo elettrico, avente hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - e\vec{E} \cdot x, \tag{52}$$

e definire il corrispondente propagatore $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0)$.

(a) Calcolare il commutatore dell'operatore impulso in rappresentazione di Schrödinger con l'operatore di evoluzione temporale e scrivere il risultato in termini dell'operatore impulso in rappresentazione di Heisenberg.
Come si scrive l'operatore di evoluzione temporale?

(b) Definire il propagatore $K(\vec{p}', t; \vec{p}, 0)$ nello spazio degli impulsi, calcolare l'elemento di matrice del commutatore determinato al punto precedente fra autostati dell'impulso ed utilizzare il risultato per dimostrare che $K(\vec{p}', t; \vec{p}, 0) \neq 0$ se e solo se $\vec{p}' = \vec{p} + e\vec{E}t$.
Che relazione c'è fra propagatore ed operatore di evoluzione temporale?

(c) Determinare se è vero o non è vero che $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0) = K(-\vec{x}', t; -\vec{x}, 0)$ e se è vero o non è vero che $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0) = K(\vec{x}, t; \vec{x}', 0)$
Che forma ha l'elemento di matrice del propagatore fra autostati di energia?

(35) Considerare una particella libera unidimensionale che al tempo $t = 0$ si trova in uno stato di onda piana

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}. \tag{53}$$

(a) Determinare il propagatore $K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0)$.
Come è definito il propagatore?

(b) Scrivere la funzione d'onda del sistema al tempo t, $\psi(x, t)$ e verificare che essa può essere ottenuta calcolando l'integrale

$$\psi(x, t) = \int dx' K(\vec{x}', t; \vec{x}, 0)\psi(x, 0) \tag{54}$$

usando l'espressione del propagatore ricavata al punto precedente.
Che forma ha l'integrale?

(36) Considerare un oscillatore armonico quantistico, avente propagatore

$$K(x', T; x, 0) = f(T) \exp \frac{i}{\hbar} S(x', T; x, 0), \tag{55}$$

dove $S(x', T; x, 0)$ è l'azione classica determinata nel problema precedente e $f(T)$ è una normalizzazione opportuna.

(a) Dimostrare che il propagatore soddisfa l'equazione di Schrödinger per una opportuna scelta della normalzzazione $f(T)$ e dimostrare che questa richiesta determina $f(T)$ a meno di una costante moltiplicativa.
Che relazione c'è fra propagatore e funzione d'onda?

(b) Dimostrare esplicitamente che quando $T = 0$

$$K(x', 0; x, 0) = \delta(x' - x) \tag{56}$$

e che questo fissa la costante moltiplicativa lasciata ineterminata al punto precedente.
Come si rappresenta la delta di Dirac come successione di gaussiane?

(37) Considerare una particella unidimensionale in un cristallo, libera di nuoversi nella regione $-a < x < a$ ma soggetta a forze di richiamo armoniche al di fuori di questo intervallo. Il potenziale è dato da

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & x > a \\ 0 & -a < x < a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2 & x < -a \end{cases} . \tag{57}$$

(a) Per un dato valore di energia E, scrivere la soluzione semiclassica nelle tre regioni in cui i due punti di inversione dividono lo spazio, esprimendo la posizione dei punti di inversione in termini di E.
Come sono definiti i punti di inversione?

(b) Determinare lo spettro di energia in approssimazione WKB.
Che forma ha la condizione di quantizzazione?

(c) Determinare lo spettro di energia per un semplice oscillatore armonico in approssimazione WKB.
Come si ottiene l'oscillatore armonico dal caso precedent?

(d) Determinare lo spettro nei limiti $a \to 0$ e $a \to \infty$, confrontare il risultato con spettri unidimensionali noti e interpretarlo fisicamente.
Qual è il parametro che determina la se a è "piccolo" o "grande"?

(38) Considerare un sistema unidimensionale che si trova in uno stato legato della hamiltoniana H_0 e perturbato da un campo elettrico

$$V_p(x) = -eEx \tag{58}$$

Determinare la perturbazione a tutti i livelli energetici del sistema

(a) al primo ordine perturbativo quando H_0 è la hamiltoniana di una buca di potenziale infinita;
Come sono fatte le autofunzioni della buca?

(b) al secondo ordine perturbativo quando H_0 è la hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale, confrontando con il risultato esatto e discutendo quanto vale la correzione ad ordini perturbativi più elevati;
come si scrive la perturbazione in termini di operatori di creazione e distruzione?

(c) al secondo ordine perturbativo quando H_0 à la hamiltoniana di un potenziale deltiforme (problemi del primo modulo, problema 36 domanda a).
Quanti stati legati ha il potenziale deltiforme, e come sono fatte le funzioni d'onda per gli stati del continuo che contribuiscono alla perturbazione?

(39) Considerare un sistema tridimensionale soggetto ad un potenziale idrogenoide schermato

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & 0 < r < R \\ -\frac{e^2}{r}e^{-\lambda(r-R)} & r > R \end{cases} \tag{59}$$

(a) Calcolare la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale.
Qual è la differenza tra la hamiltoniana data e qualla idrogenoide imperturbata?

(b) Discutere gli andamenti della soluzione trovata quando $\lambda \to 0$ e quando $R \to \infty$.
Che cosa diventa il potenziale nei due limiti dati?

(40) La carica del nucleo di un atomo idrogenoide aumenta di una unità in seguito ad un decadimento β.

(a) Determinare la variazione di energia dell'elettrone nell'n-esimo stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni, utilizzando il risultato del problema 31.
Ricordare il teorema del viriale

(b) Determinare esattamente la differenza di energia tra il lvello n-esimo di energia per due atomi idrogenoidi per cui la carica del nucleo differisce di una unità e confrontare con il risultato trovato al punto precedente.
Quando è buona l'approssimazione perturbativa, e perché?

(41) Considerare nuovamente la hamiltoniana Eq. (47-47) del problema (27) e trattare l termine proporzionale a λ come perturbazione. Determinare la perturbazione al primo ordine all'autovalore di energia per il primo stato eccitato della hamiltoniana H_0. Confrontare con il risultato esatto trovato nel problema (27).
Quali sono gli autostati della matrice della perturbazione?

(42) Considerare una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad potenziale armonico isotropo, perturbata da un campo elettrico diretto lungo l'asse z.

(a) Dimostrare che gli elementi di matrice del potenziale perturbante soddisfano

$$\langle nlm|\hat{z}|000\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\delta_{n0q}\delta_{l1}\delta_{m0}, \tag{60}$$

dove $|nlm\rangle$ sono autofunzioni di energia e di momento angolare con $E_{nl} = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right)$, e $\hat{z}$ è l'operatore posizione lungo l'asse z, esprimendo l'operatore $\hat{z}$ in termini di operatori di creazione e distruzione per l'oscillatore armonico unidimensionale, e le autofunzioni dell'oscillatore armonico in coordinate cartesiane in termini di quelle in coordinate sferiche.
Che valore del momento angolare porta $\hat{z}$ (ricordare il problema 12 puntoc)

(b) Determinare la perturbazione all'energia dello stato fondamentale fino al secondo ordine pertubativo.
Quanto vale la perturbazione al primo ordine?

(43) Considerare nuovamente il sistema del problema (32) avente hamiltoniana Eq. (50)

(a) Indicando con $|lm\rangle$ un autostato di L^2 ed L_z, dimostrare che gli elementi di matrice dell'operatore posizione lungo l'asse z soddisfano le seguenti identità, che generalizzano quelle viste nel problema precedente

$$\langle l'm'|z|lm\rangle = \delta_{mm'}\langle l'm|z|lm\rangle \tag{61}$$

$$(-1)^{l+l'}\langle l'm'|z|lm\rangle = \langle l'm'| - z|lm\rangle. \tag{62}$$

Come si trasforma z (a) sottorotazioni intorno all'asse z (prima identità) e (b) sotto parità (seconda identità)?

(b) Considerare la hamiltoniana

$$H_2 = H_r + Dz, \tag{63}$$

dove H_r è la hamiltoniana relativa del problema (32), D è una costante reale positiva e z è l'operatore posizione lungo l'asse z. Sfruttando le identità Eq. (61,62) determinare al primo ordine la perturbazione all'energia del primo stato eccitato della hamiltoniana H_r dovuta al termine proporzionale a D. Sfruttare l'elemento di matrice $\langle 200|z|210\rangle = -3a_0$.
Quanto valgono gli elementi di matrice diagonali della perturbazione? Suggerimento: Ricordare l'elemento di matrice .

(c) Determinare il valor medio dell'operatore $\vec{x}$ nello stato fondamentale della hamiltoniana H_2 del punto precedente al primo ordine perturbativo non-banale (cioè il più basso ordine al quale si trova un risultato diverso da zero). Esprimere il risultato in termini di elementi di matrice dell'operatore dato negli autostati idrogenoidi (senza calcolare la sommatoria)
Quali element di matrice di $\vec{x}$ sono diversi da zero?

(44) Considerare un oscillatore armonico bidimensionale con potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + \lambda xy. \tag{64}$$

(a) Trattando il termine proporzionale a λ come una perturbazione, determinare la correzione ai primi due livelli eccitati al primo ordine in λ.
Diagonalizzare la matrice della perturbazione.

(b) Determinare la degenerazione degli stati perturbati.
A che cosa è dovuta la degenerazione in assenza di perturbazione?

(c) Determinare lo spettro esattamente e discutere per quali valori del parametro λ l'approssimazione perturbativa è buona.
Ricordare i problemi 4-5

(45) Considerare una particella unidimensionale in una buca di potenziale infinita, soggetta ad un potenziale di interazione con un campo elettrico della forma della Eq. (58), ma ora con intensità dipendente dal tempo secondo la legge

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\Theta(t)e^{-t\tau}, \tag{65}$$

dove τ è una costante reale positiva.

(a) Dimostrare che sotto l'azione di questo ptenziale il sistema può subire una transizione fra lo stato fondamentale e qualunque stato eccitato di ordine pari.
Qual è la parità delle autofunzioni della buca?

(b) Calcolare la probabiltà di transizione fra lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato nel limite $t \to \infty$.
Che cosa succede se $t \gg \tau$?

(46) Considerare una particella di massa m in tre dimensioni soggetta ad potenziale armonico isotropo, perturbata a partire dal tempo $t = 0$ da un campo elettrico diretto lungo l'asse z oscillante e smorzato:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0\Theta(t)\cos\omega t e^{-t/\tau}, \tag{66}$$

dove ω e τ sono costanti reali positive e $\vec{E}_0$ è un vettore costante.

(a) Scrivere l'espressione dell'ampiezza di transizione dallo stato fondamentale in uno stato eccitato qualunque al primo ordine della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo.

(b) Dimostrare che solo una transizione può avvenire e determinarne la probabilità per $t \gg \tau$.
Ricordare il problema 42 punto a.

(47) Considerare nuovamente la hamiltoniana relativa del sistema a due corpi del problema (7), avente hamiltoniana totale data dalla Eq. (5).

(a) Supporre che il campo elettrico $\vec{E}$ dipenda dal tempo e sia dato da

$$\vec{E}(t) = \vec{E}e^{-t/\tau}\Theta(t), \tag{67}$$

dove $\vec{E}$ è un vettore costante a componenti reali e Θ è la funzione a gradino (funzione di Heaviside),

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0; \\ 1 & t > 0. \end{cases} \tag{68}$$

Supporre che il sistema sia preparato nello stato fondamentale della hamiltoniana relativa al tempo $t = 0^- = \lim_{\epsilon \to 0} -\epsilon$, cioè subito prima che la pertubazione venga accesa. Trattando il campo elettrico come perturbazione, determinare la probabilità che esso subisca una transizione a qualunque altro autostato della hamiltoniana imperturbata al tempo finale $t \to \infty$, utilizzando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine.
Come si scrive la perturbazione in termini di operatori di creazione e distruzione?

(b) Dimostrare, usando la rappresentazione di interazione, che per questo sistema l'ampiezza di transizione (esatta) fra lo stato fondamentale al tempo $t = 0$, $|0(t = 0^-)\rangle$, e il primo stato eccitato al tempo $t = \infty$, $|1(t = \infty)\rangle$ è data da

$$\langle 1(t = \infty)|0(t = 0^-)\rangle = \lim_{t \to \infty} \langle 0(t = 0^-)|a(t)|0(t = 0^-)\rangle. \tag{69}$$

Come si scrive l'ampiezza in rappresentazione di interazione?

(c) Usare il risultato del punto precedente per calcolare l'ampiezza di transizione relativa al punto (a) in modo esatto, e confrontare il risultato con quello perturbativo.
Come si determina l'evoluzione temporale dell'operatore s?

(48) Determinare la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born:

(a) per la diffusione da un potenziale a "sfera dura":

$$V(r) = \left\{ \begin{array}{cc} V_0 & r < R \\ 0 & r \geq R \end{array} \right. ; \tag{70}$$

(b) per la diffusione di un potenziale a "delta-shell"

$$V(r) = V_0 \delta(r - r_0); \tag{71}$$

(c) per la diffusione da potenziale di Yukawa

$$V(r) = \frac{V_0}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}, \tag{72}$$

esprimendo il risultato in termini dell'energia E della particella incidente e dell'angolo di *scattering* θ tra le direzioni della particella entrante e di quella uscente e discutendo la dipendenza della sezione d'urto da E e da θ;
Esprimere in termini di E e θ il modulo dell'impulso trasferito $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$.

(d) per la diffusione da potenziale coulombiano

$$V(r) = e^2 \frac{1}{r} \tag{73}$$

confrontando con il caso di potenziale di Yukawa.
In quale limite il potenziale di Yukawa si riduce a quello coulombiano?

(49) Considerare un sistema di n particelle identiche non interagenti. Supporre che la hamiltoniana del sistema sia data dalla somma di n hamiltoniane indentiche ad un corpo H_i aventi spettro noto:

$$H = \sum_{I=1}^{n} H_i; \qquad H_i|k_i\rangle = E_k|k_i\rangle. \tag{74}$$

(a) Determinare l'energia dello stato fondamentale quando le particelle hanno spin 0, oppure quando hanno spin $\frac{1}{2}$.
Quanti stati ci sono per ogni livello energetico?

(b) Quando $n = 3$ scrivere la funzione d'onda di stato fondamentale per entrambi i valori dello spin.
Che numeri quantici porta la funzione d'onda?

(50) Considerare un sistema di due particelle identiche in una dimensione, con hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + B\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\,, \tag{75}$$

dove $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin delle due particelle e B ed ω sono costanti reali positive.

(a) Nel caso di particelle di spin 0 (quindi in assenza del termine di spin) determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due livelli eccitati e scrivere la funzione d'onda in termini di funzioni d'onda di particella singola.
Quante autofunzioni ci sono per ogni scelta di numeri quantici?

(b) Nel caso di fermioni di spin $\frac{1}{2}$, determinare la funzione d'onda completa (spaziale e di spin) per lo stato fondamentale ed il primo livello eccitato del sistema, ed i corrispondenti autovalori di energia e spin, a seconda dei valori dei parametri B ed ω.
Esprimere l'hamiltoniana in termini di un opportuno insieme di operatori che commutano.

(c) Rispondere alla domanda precedente nel caso particolare in cui $B = 0$, ed in particolare determinare la degenerazione degli stati presi in esame, confrontando con il caso in cui $B \neq 0$.
Quali e quante sono le funzioni d'onda di spin?

(51) Considerare un sistema formato da tre particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ e di uguale massa m in tre dimensioni, confinate all'interno di un parallelepipedo. La dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) + V(\vec{x}_3) - \frac{\lambda}{\hbar^2}\left(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1\right) \tag{76}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ e $\vec{s}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione, impulso e spin per le tre particelle e λ è una costante reale positiva. Il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \leq a \\ \infty \text{ se } |x_i^{(j)}| > a \end{cases}, \tag{77}$$

dove $x_i^{(j)}$ è la j-esima componente dell'operatore posizione per la i-esima particella ed a è una costante reale positiva. Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale della hamiltoniana

(a) se $\lambda \gg \frac{1}{ma^2}$;
Quali e quante sono le funzioni d'onda di spin?

(b) se $\lambda \ll \frac{1}{ma^2}$.
Quali e quante sono le funzioni d'onda di spin?

(52) Considerare un atomo di elio, formato da due elettroni identici di massa m e spin $\frac{1}{2}$ che si muovono nel potenziale di un nucleo. Detti $\vec{x}_1$, $\vec{p}_1$, $\vec{x}_2$ e $\vec{p}_2$ gli operatori posizione ed impulso

dei due elettroni, ed e una costante reale (carica dell'elettrone), l'hamiltoniana è

$$H = H_0 + H_{12} \tag{78}$$

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_1|} - \frac{2e^2}{|\vec{x}_2|}, \tag{79}$$

$$H_{12} = \frac{2e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \tag{80}$$

(a) Determinare funzione d'onda, energia e degenerazione per lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato del sistema trascurando il termine H_{12}.
Quali sono i possibili stati di spin del sistema?

(b) Determinare la correzione all'energia dello stato fondamentale, e del primo stato eccitato avente momeento angolare orbitale totale nullo, trattando H_{12} come una perturbazione al primo ordine (non è necessario calcolare l'integrale).
Quali sono gli stati corrispondenti al primo livello eccitato?