PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

PRIMA PARTE
anno accademico 2023-2024

(1) Si consideri una oggetto quantistico che può passare attraverso uno schermo trasparente, diviso in due zone sia orizzontalmente che verticalmente. Lo schermo può essere equipaggiato da rivelatori che segnalano se l'oggetto passa nella parte alta o bassa e nella parte sinistra o destra dello schermo. Si denota con un ket $|ij\rangle$ lo stato del sistema quando esso è stato rivelato in una delle quattro zone, dove $i = 0, 1$ indica che l'oggetto è rispettivamente passato a sinistra o destra, e $j = 0, 1$ in alto o in basso. Quindi il ket $|00\rangle$ è lo stato in cui si trova l'oggetto quando è stato rivelato nel quadrante in alto a sinistra e così via.

Si supponga che l'oggetto quando incide sullo schermo si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}\,(|00\rangle + |01\rangle) + \sqrt{\frac{2}{3}}i\,(|10\rangle - |11\rangle)\right] \tag{1}$$

(a) Qual è la probabilità che l'oggetto venga rivelato in ciascuna delle quattro zone dello schermo?
come si calcola la probabilità dei risultati di una misura?

(b) Qual è la probabilità che l'oggetto venga rivelato nella parte sinistra dello schermo? E nella parte alta?
come si combinano le probabilità?

(c) Qual è la probabilità che l'oggetto *non* venga rivelato nella parte sinistra dello schermo?
come si calcola la probabilità che un evento non accada?

(d) Se solo il rivelatore destra-sinistra è attivato, ed esso rivela che l'oggetto non è passato nella parte sinistra dello schermo (ma si ha la certezza che esso sia passato attraverso lo schermo) in che stato si trova l'oggetto subito la misura da parte di questo rivelatore?
In che stato si trova un sistema dopo la misura? Spiegare la misura come proiezione.

(2) Si supponga ora che l'oggetto della domanda precedente possa arrivare sullo schermo passando da due fenditure, A e B. Se passa dalla fenditura A, si trova nello stato Eq. (1), ma se invece passa dalla fenditura B si trova nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}\,(|00\rangle + |01\rangle) - \sqrt{\frac{2}{3}}i\,(|10\rangle - |11\rangle)\right] \tag{2}$$

Nel caso della domanda precedente solo la fenditura A era aperta.

(a) Se invece è aperta solo la fenditura B, la risposta a ciascuna delle domande del punto precedente cambia, se cambia, e come?
Da che cosa dipendono le probabilità? E gli stati?

(b) Se sono aperte entrambe le fenditure, in che stato si trova il sistema, supponendo che passi dall'una o dall'altra fenditura con uguale probabilità e senza acquisire una fase relativa?
Che cosa dice il principio di sovrapposizione?

(c) Se la fase dello stato $|\phi\rangle$ cambia per un fattore i, cambia il risultato della risposta alle due domande precedenti, e se sì come?
Quando è misurabile una fase?

(3) Si supponga di essere nella situazione delle due domande precedenti; si sa che è aperta solo una delle due fenditure, o A o B, ma non si sa quale. L'oggetto non viene rivelato nella parte alta dello schermo.

(a) È possibile distinguere a posteriori, con una misura opportuna, il caso in cui è aperta la fenditura A da quello in cui è aperta B?
Gli stati in cui si trova il sistema nell'uno o nell'altro caso sono ortogonali?

(b) Se, oltre che non essere rivelato nella parte alta, l'oggetto è rivelato nella zona sinistra, la risposta alla domanda precedente cambia?
In che stato si trova il sistema in tal caso e qual è la sua sovrapposizione con gli stati $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$?

(c) Se sappiamo che l'oggetto non si trova in nessuno dei due stati corrispondenti ai due casi considerati al punto (a) — ossia né nello stato in cui si trova quando è aperta solo la fenditura A, né quando è aperta solo la fenditura B — possiamo dire in che stato si trova?
Gli stati dati formano una base?

(4) Si supponga ora di essere nella situazione della domanda (2b) (entrambe le fenditure aperte). È possibile eseguire una misura sull'oggetto dato, immediatamente prima del suo passaggio attraverso lo schermo, tale per cui la probabilità di passare subito dopo sia nella parte destra che in quella sinistra dello schermo siano nonnulle entrambe? Se sì, questa misura è unica?
Come si fa a rigenerare uno stato?

(5) Considerare ora un sistema quantistico che può trovarsi in quattro stati esaustivi ed esclusivi, indicati come $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, e considerare gli stati del sistema

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|00\rangle + (1+i)|01\rangle\right] \tag{3}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i|00\rangle + |10\rangle\right], \tag{4}$$

$$|\psi_3\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle, \tag{5}$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|10\rangle + |11\rangle\right]. \tag{6}$$

(a) Determinare la probabilità che un sistema preparato nello stato $|00\rangle$ venga rivelato in ciascuno dei quattro stati $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_4\rangle$.
Come si calcola la probabilità che un sistema preparato in uno stato venga rivelato in un altro stato?

(b) Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\phi\rangle = N\left[|\psi_1\rangle + 2i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle\right]. \tag{7}$$

Determinare la costante di normalizzazione N. Determinare inoltre la probabilità che un sistema preparato in questo stato venga rivelato nello stato $|00\rangle$.
Qual è l'espressione dello stato dato in termini degli stati di base?

(c) Supporre che su un sistema che si trova nello stato $|\phi\rangle$ Eq. (7) venga eseguita una prima misura che rivela che si trova nello stato $|\psi_2\rangle$. Qual è la probabilità di trovare questo risultato? Qual è probabilità che una successiva misura riveli il sistema nello stato $|00\rangle$?
Attenzione: gli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono ortogonali?

(6) Nella situazione della domanda 1, considerare un'osservabile O_1 che prende il valore $+1$ quando l'oggetto è rivelato nella parte alta dello schermo, e 0 quando è rivelata nella parte bassa e un'osservabile O_2 che prende il valore $+1$ quando l'oggetto è rivelato nella parte sinistra dello schermo, e 0 quando è rivelata nella parte destra.

(a) Scriverere la matrice dei due operatori O_1 e O_2 nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$.
come è definita la matrice associata ad un operatore?

(b) Determinare il valor medio dei risultati della misura dell'osservabile associata agli operatori O_1 e O_2 per il sistema della domanda (1) che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1).
come si calcola il valore medio di una misura?

(c) Come cambia il risultato delle domande precedenti se per entrambi gli operatori si sotituisce il valore 0 con il valore -1?
che tipo di operatore sono O_i nel primo caso?

(7) Nella situazione delle domande (1-2), considerare l'operatore associato all'osservabile O, che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1) e 0 quando il sistema non viene rivelato nello stato $|\psi\rangle$ (ossia se viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi\rangle$).

(a) Scrivere la matrice dell'operatore associato a questa osservabile, nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$
come si scrive l'operatore associato ad un'osservabile?

(b) Se un sistema è preparato nello stato $|\phi\rangle$ Eq. (2), quali sono i possibili valori di una misura dell'osservabile O, qual è la probabilità di trovare ciascuno di questi valori, e in che stato si trova il sistema dopo la misura in ciascun caso?
che cosa succede quando si misura un'osservabile?

(c) Supporre che il sistema si trovi in uno stato qualunque $|\chi\rangle$ e che venga effettuata una misura dell'osservabile O. Determinare i due operatori Π_1 e Π_2 che agendo sullo stato $|\chi\rangle$ restituiscono (a meno della normalizzazione) lo stato in cui il sistema si trova dopo la misura, a seconda dei due risultati possibili della misura.
che proprietà hanno gli operatori cercati?

(8) Siano A e B operatori hermitiani e sia $C = A\,B$.

(a) Determinare l'operatore $C^\dagger$ in termini di A e B.
come agisce C?

(b) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = C^\dagger$?
Che forma hanno C e $C^\dagger$ in termini di A e B?

(c) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = -C^\dagger$?
Che forma hanno C e $C^\dagger$ in termini di A e B?

(d) Dimostrare che C può sempre essere scritto come somma di un operatore hermitiano e di un operatore anti-hermitiano e scrivere l'espressione esplicita della parte hermitiana e della parte antihermitiana di C in termini di A e B. $C = -C^\dagger$.
Posso sempre scrivere C come somma di termini aventi la forma di quelli considerati ai punti precedenti?

(9) Per un sistema di un qubit, considerare gli stati $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$.

(a) Scrivere in notazione ket-bra l'operatore lineare $\mathcal{H}$ che agendo sullo stato $|0\rangle$ lo trasforma nello stato $|+\rangle$ e agendo sullo stato $|1\rangle$ lo trasforma nello stato $|-\rangle$ (operatore di Hadamard).

Come agisce un operatore su uno stato?

(b) Scrivere la matrice associata all'operatore $\mathcal{H}$ nella base degli stati $|0\rangle$, $|1\rangle$.
Come si calcola la matrice associata ad un operatore?

(10) Si determini la matrice che per un singolo qubit fa passare dalla base degli stati $|i\rangle$ alla base degli stati $|\pm\rangle$ della domanda precedente. *Come si determinano le componenti della matrice di cambiamento di base in termini dei vettori di base?*

(11) Per ciascuno dei seguenti operatori, si determini se siano o meno unitari e/o hermitiani:

(a) l'operatore O della domanda (7);
Che tipo di operatore è?

(b) l'operatore $\mathcal{H}$ della domanda (9);
Che cosa succede se lo applico due volte di fila?

(c) gli operatori Π_1 e Π_2 determinati al punto (c) della domanda (7).
La misura è reversibile?

(12) Per uno stato di due qubit $|ij\rangle$, con i, $j = 0$, 1 si determinino le matrici dei seguenti operatori, e si discuta se siano unitari e/o hermitiani:

(a) l'operatore che scambia i due qubit (SWAP);

(b) l'operatore che se il primo qubit vale 0 lascia il secondo qubit invariato, e se il primo qubit vale 1 trasforma il valore del secondo qubit in 0 se esso vale 1 e viceversa (CNOT).
In entrambi i casi, la trasformazione data è reversibile? Che cosa succede se la si applica due volte?

(13) Considerare gli operatori O_1, O_2, O delle domande 6-7.

(a) Determinare se siano compatibili o meno.
Qual è la condizione di compatibilità (e qual è il suo significato fisico?)

(b) Determinare se alcuni di essi formino un insieme completo di operatori.
Qual è la condizione di completezza (e qual è il suo significato fisico?)

(14) Considerare gli stati $|\pm\rangle$ e $|i\rangle$ delle domande 9-10, e gli operatori P e Q associati alle osservabili che prendono i valori ± 1 rispettivamente quando il sistema si trova negli stati $|\pm\rangle$ (osservabile P) o quando il sistema si trova negli stati $|0\rangle$, $|1\rangle$ (osservabile Q).

(a) Determinare la relazione di indeterminazione per questa coppia di operatori.
Qual è la forma della relazione di indeterminazione?

(b) Verificare che la relazione di indeterminazione è soddisfatta sugli autostati di P e spiegare il risultato.
Qual è il valore massimo che l'indeterminazione può assumere in uno stato di un qubit?

(c) Determinare il o gli stati di minima indeterminazione, ossia gli stati per i quali la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza. Determinare quindi l'indeterminazione si P e Q in questi stati.
A quali condizioni la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza?

(15) Si consideri un sistema di un qubit i cui due stati $|0\rangle$, $|1\rangle$ sono autostati di un'osservabile O che soddisfano le equazioni agli autovalori

$$O|0\rangle = |0\rangle; \qquad O|1\rangle = -|1\rangle. \tag{8}$$

(a) Il sistema viene preparato in un certo stato $|\psi\rangle$, oppure in un altro stato $|\phi\rangle$, e quindi viene effettuata una misura di O. L'operazione (preparazione seguita da misura) è ripetuta più volte. Quando il sistema viene preparato in $|\psi\rangle$ la misura dà sempre come risultato -1, mentre quando il sistema viene preparato in $|\phi\rangle$ la misura dà $+1$ in $\frac{1}{3}$ dei casi, e -1 in $\frac{2}{3}$ dei casi. Scrivere la più generale forma dei vettori di stato $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ nella base computazionale (base degli autostati di O).
Qual è la più generale parametrizzazione di uno stato quantistico?

(b) Da quanti parametri dipende ciascuno dei vettori di stato della domanda precedente, quali e quanti di questi parametri sono inosservabili, e quali invece corrispondono a proprietà misurabili del sistema?
Quali sono i parametri osservabili?

(c) Qual è la probabilità che un sistema preparato nello stato $|\phi\rangle$ venga rivelato nello stato $|\psi\rangle$? Il risultato è univocamente determinato, o dipende da qualcuno dei parametri da cui dipendono $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$?
Da quali parametri dipende il prodotto scalare fra gli stati dati?

(d) Si cosideri un'osservabile P, avente spettro non degenere e tale che lo stato $|\phi\rangle$ della domanda (a) sia autostato di P. Le osservabili O e P sono compatibili? La risposta dipende dal fatto che lo spettro di P sia degenere o meno?
Che succede se lo spettro di P è degenere?

(e) Determinare il valor medio e l'indeterminazione dei risultati delle misure di O in ciascuno dei due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$.
Come si calcola l'indeterminazione?

(f) Determinare il vincolo posto dal principio di indeterminazione sul prodotto delle indeterminazioni delle misure di P e O negli stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. Giustificare il risultato.
Qual è il valore massimo che l'indeterminazione può assumere in uno stato di un qubit?

(g) Costruire uno stato $|\chi\rangle$ tale che il posto dal principio di indeterminazione sul prodotto delle indeterminazioni delle misure di P e O in tale stato sia non-banale (cioè non si riduca alla condizione $0 \geq 0$).
In quali stati l'inderminazione per un dato operatore è diversa da zero?

(16) Nella situazione della domanda (2) considerare un insieme di oggetti che vengono tutti rivelati nella parte alta dello schermo (caratterizzata da $j = 0$). Le fenditure sono equipaggiate mediante un rivelatore, però non si riesce a mettere il rivelatore in coincidenza con il passagggio degli oggetti e dunque non si sa da quale fenditura sia passato ciascuno di essi. Si sa solo che hanno 50% di probabilità di passare da ciascuna fenditura.

(a) Determinare la matrice densità per il sistema dato.
quali sono gli stati in cui si può trovare ciascuno degli oggetti e qual è la loro probabilità?

(b) La matrice densità tovata è unica? Se non lo è, dare un esempio di una diversa sovrapposizione di stati (diversi stati e diverse probabilità) che corrisponde alla stessa matrice densità.
qual è la forma della matrice densità data in una base ortonormale?

(c) Dato un insieme di oggetti descritto da questa matrice densità, qual è il valor medio della misura delle osservabili date dalle matrici di Pauli?
Come si calcola questo valor medio?

(d) Se invece che le osservabili date dalle matrici di Pauli si misurano le osservabili associate agli operatori O_1, O_2, O delle domande (6)-(7) e (13), è possibile determinare completamente questa matrice densità?
quanti parametri determinano completamente la matrice densità per uno stato misto?

(17) Da quanti parametri dipende la matrice densità per un sistema che si trova in uno stato puro, e da quanti se si trova in uno stato misto

(a) per un sistema di un qubit
Qual è la forma della più generale matrice densità?

(b) per un sistema di due qubit.
Che proprietà deve avere la più generale matrice densità?

(18) Calcolare l'integrale

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y^2 - x^2) f(y) dy. \tag{9}$$

(19) Si consideri un sistema invariante per dilatazioni, $q \to q' = \lambda q$:

(a) Determinare, mediante il teorema di Noether, la quantità classicamente conservata (detta viriale).

(b) Determinare l'operatore quantistico che si ottiene prendendo il viriale classico, e sostituendo q e p con gli operatori quantistici corrispondenti. Discutere se l'operatore che si ottiene sia o meno hermitiano.

(c) Determinare come si trasforma sotto dilatazioni un autostato della posizione e determinare la condizione di normalizzazione degli operatori trasformati.

(d) Determinare l'operatore hermitiano che genera le dilatazioni sugli stati quantistici $|q\rangle$, e discutere la sua relazione con la quantità classica ottenuta al punto (b).

(20) Definire l'operatore $\mathcal{P}$ (operatore parità) i cui elementi di matrice soddisfano

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x), \tag{10}$$

dove $|\psi\rangle$ è uno stato qualunque e $|x\rangle$ sono autofunzioni della posizione.

(a) Determinare le autofunzioni e gli autovalori di P.

(b) Determinare gli elementi di matrice del commutatore $[\mathcal{P}, T]$, dove T è l'operatore traslazione, fra autostati della posizione, ed in particolare discutere se esso si annulli o meno.

(c) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sull'operatore posizione, ossia determinare $\mathcal{P}^{-1}\hat{q}\mathcal{P}$.

(d) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sull'operatore traslazione, ossia determinare $\mathcal{P}^{-1}T\mathcal{P}$.

(e) Determinare gli elementi di matrice $\langle q|[\hat{p}, \mathcal{P}]|\psi\rangle$, $\langle q|[|\hat{p}|, \mathcal{P}]|\psi\rangle$, $\langle k|[\hat{p}, \mathcal{P}]|\psi\rangle$, $\langle k|[|\hat{p}|, \mathcal{P}]|\psi\rangle$, dove $|q\rangle$ e $|k\rangle$ sono autostati della posizione e dell'impulso rispettivamente, $\hat{p}$ è l'operatore impulso, $|\hat{p}|$ è l'operatore

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar |k| |k\rangle\langle k|. \tag{11}$$

e $|\psi\rangle$ è uno stato generico

(21) Calcolare i seguenti commutatori (si intende che x e p indicano sempre i corrispondenti operatori)

(a) $[x, p^2]$;

(b) $[x^2, p]$;

(c) $[x^2, p^2]$;

(d) $[p, \exp(\lambda x)]$.

(e) $[x, \exp(\lambda p)]$.

(22) Considerare una coppia di funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ normalizzabili in senso proprio e aventi le proprietà

$$\psi_0(-x) = \psi_0(x) = \psi_0^*(x), \tag{12}$$

$$\psi_1(x) = N\frac{d}{dx}\psi_0(x), \tag{13}$$

dove N è una costante reale e positiva. Considerare infine la funzione d'onda

$$\psi_2(x) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x), \tag{14}$$

con c_1 e c_2 costanti complesse tali che $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

(a) Dimostrare che gli stati aventi funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sono ortogonali.

(b) Dimostrare che se gli stati aventi funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sono normalizzati allora anche lo stato avente funzione d'onda $\psi_2(x)$ è normalizzato.

(c) Calcolare i valori medi degli operatori posizione ed impulso negli stati aventi funzione d'onda $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$.

(d) Dimostrare che

$$\langle\psi_0|[x^2, p^2]|\psi_o\rangle = 0. \tag{15}$$

(23) Considerare l'operatore $O = \hat{x}\hat{p}^n$ dove $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sono gli operatori posizione e impulso ed n è intero positivo.

(a) Dimostrare che O non è hermitiano e calcolare la differenza $D = O - O^\dagger$.

(b) Calcolare esplicitamente l'elemento di matrice $\langle\psi|O^\dagger|\phi\rangle$ nella base delle coordinate in termini delle funzioni d'onda $\langle x|\phi\rangle = \psi(x)$ $\langle x|\phi\rangle = \phi(x)$, usando la definizione di aggiunto di un operatore. Verificare che coincide con l'elemento di matrice dell'operatore $O + D$, dove D è stato determinato al punto precedente.

(c) Ripetere il calcolo al punto precedente ma ora usando la base degli impulsi.

(24) Considerare l'operatore parità $\mathcal{P}$ definito nel problema (21), ed il suo commutatore con l'operatore impulso e con l'operatore $|\hat{p}|$ definito come

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar|k||k\rangle\langle k|; \tag{16}$$

e determinare gli elementi di matrice

(a) $\langle k|\,[\hat{p}, \mathcal{P}]\,|\psi\rangle$;

(b) $\langle q|\,[\hat{p}, \mathcal{P}]\,|\psi\rangle$;

(c) $\langle k|\,[|\hat{p}|\,, \mathcal{P}]\,|\psi\rangle$;

(d) $\langle q|\,[|\hat{p}|\,, \mathcal{P}]\,|\psi\rangle$,

dove $|k\rangle$ e $|q\rangle$ sono rispettivamente autostati dell'impulso e della posizione, e $|\psi\rangle$ è uno stato generico.

(25) Considerare un sistema di un qubit, la cui evoluzione temporale è data dalla Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega \left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right) \tag{17}$$

Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura dell'operatore

$$A = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \tag{18}$$

che dà come risultato l'autovalore $+1$.

(a) Determinare il valor medio e l'indeterminazione di una misura di A ad ogni tempo successivo t. Giustificare la dipendenza o indipendenza dal tempo del risultato.

(b) Definito inoltre l'operatore

$$B = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \tag{19}$$

determinare anche il valor medio e l'indeterminazione di una misura di B ad ogni tempo successivo t.

(c) Verificare che ad ogni tenpo t le indeterminazioni di A e B soddisfano il principio di indeterminazione.

(26) Considerare un sistema di un qubit, la cui evoluzione temporale può essere data da una Hamiltoniana i cui elementi di matrice sono

$$H_1 = E_0\sigma_2, \tag{20}$$

(indipendente dal tempo) oppure dalla hamiltoniana dipendente dal tempo

$$H_2(t) = E_0 t\sigma_2, \tag{21}$$

dove E_0 è una costante reale positiva e σ_2 è una matrice di Pauli.

(a) Determinare esplicitamente l'operatore di evoluzione temporale in entrambi i casi.

(b) Nel caso della hamiltoniana H_1, se al tempo $t = 0$ il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $A = \sigma_3$, qual è la probabilità che al tempo t esso si trovi nell'altro autostato dello stesso operatore?

(c) Rispondere di nuovo alla domanda precedente, ma nel caso in cui il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $B = \sigma_1$.

(d) Rispondere di nuovo alla domanda precedente, ma nel caso in cui il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $C = \sigma_2$.

(e) Utilizzare la risposta alla domanda precedente per calcolare nuovamente la probabilità del punto (b) ma *senza* usare l'espressione esplicita dell'operatore di evoluzione temporale.

(27) (a) Dimostrare che in un autostato della hamiltoniana

$$\langle [A, H] \rangle = 0 \tag{22}$$

per qualunque operatore A.

(b) Determinare, per uno stato generico, e per una hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}), \tag{23}$$

la dipendenza temporale del valor medio di $\hat{v}$, $\frac{d}{dt}\langle \hat{v} \rangle$, dove $\hat{v}$ è l'operatore viriale

$$\hat{v} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}\right). \tag{24}$$

(c) Utilizzare i risultati delle domande precedenti per dimostrare che, per un potenziale della forma

$$V(\hat{q}) = \hat{q}^{\alpha}, \tag{25}$$

i valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in un autostato di energia sono proporzionali, e determinare il coefficiente di proporzionalità (*teorema del viriale*).

(d) Determinare ora la dipendenza dal tempo in rappresentazione di Heisenberg dell'operatore $\hat{v}$ e confrontare con il risultato al punto (b).

(e) Determinare la condizione generale per cui si conservano gli autovalori di $\hat{v}$, e la simmetria associata a questa legge di conservazione.

(28) Considerare il sistema della domanda (15), e supporre che la sua evoluzione temporale sia determinata dalla hamiltoniana

$$H = E\left[|1\rangle\langle 1| + \sqrt{2}\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)\right], \tag{26}$$

dove E è una costante reale positiva con dimensioni di un'energia.

(a) Determinare lo spettro di autovalori e di autostati di energia. La hamiltoniana è compatibile con l'operatore O dato dalla Eq. 8?

(b) Determinare la probabilità che, se il sistema al tempo $t = 0$ viene preparato nello stato $|1\rangle$, una misura al tempo t lo riveli nello stato $|\psi\rangle$ della domanda (15a).

(c) Dimostrare che esiste una particolare scelta dei parametri da cui dipende il vettore di stato $|\phi\rangle$ della domanda (15a), tale per cui diventa indipendente dal tempo la probabilità che, se il sistema al tempo $t = 0$ viene preparato nello stato $|1\rangle$, una misura al tempo t lo riveli in tale stato $|\phi\rangle$. Dimostrare inoltre che questa scelta determina completamente lo stato $|\phi\rangle$ stesso.

(d) Determinare la matrice densità per un sistema tale che i risultati delle misure dell'osservabile O siano gli stessi di quando il sistema è preparato nello stato $|\phi\rangle$ della domanda sapendo che il sistema si trova in un autostato dell'energia.

(29) Considerare il sistema della domanda (5), e supporre che la sua evoluzione temporale sia data dalla hamiltoniana $H = EO$, dove O è l'operatore associato all'osservabile che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi_2\rangle$ Eq. (4), e 0 quando il sistema viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi_2\rangle$.

(a) Determinare i possibili valori di energia e la probabilità che una misura di energia per un sistema preparato nello stato $|\psi_1\rangle$ fornisca ciascuno di questi valori.

(b) Determinare la probabilità che il sistema, preparato nello stato $|00\rangle$ al tempo $t = 0$, sia rivelato al tempo $t = T$ nello stato $|01\rangle$.

(c) Determinare la probabilità che il sistema, preparato nello stato $|00\rangle$ al tempo $t = 0$ al tempo $t = T$ sia rivelato nello stato $|10\rangle$.

(d) Definire l'operatore associato all'osservabile O', che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|00\rangle$ e -1 quando il sistema viene rivelato nello stato $|10\rangle$. Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per questo operatore.

(e) Determinare esplicitamente l'operatore alla Heisenberg O' e le sue autofunzioni a qualunque tempo t.

(30) Considerare la hamiltoniana che descrive il moto di una particella soggetta ad una forza costante (potenziale lineare)

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \kappa\hat{x}. \tag{27}$$

(a) Discutere quali fra i seguenti operatori possano essere diagonalizzati simultaneamente: H, $\hat{x}$, $\hat{p}$, T, V, dove T e V sono rispettivamente gli operatori energia cinetica ed energia potenziale.

(b) Determinare la dipendenza dal tempo degli operatori T e V in rappresentazione di Heisenberg sia in forma differenziale che integrale. Confrontare con il risultato classico.

(c) Intepretare il risultato della domanda precedente in termini di proprietà di invarianza della hamiltoniana.

(d) Determinare la a dipendenza dal tempo di $\hat{x}$ e $\hat{p}$ e interpretare il risultato in termini delle proprietà di invarianza della hamiltoniana.

(31) Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x, \tag{28}$$

dove x e p sono i consueti operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva. Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$, la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\langle x|\psi\rangle = N \left(e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}\right) e^{-\lambda x^2}, \tag{29}$$

dove λ è una costante reale positiva.

(a) Determinare il valor medio di una misura di posizione al tempo $t = 0$.

(b) Determinare il valor medio di una misura di impulso al tempo $t = 0$.

(c) Scrivere e risolvere le equazioni di Heisenberg per gli operatori x e p per il sistema dato.

(d) Determinare i valori medi per una misura di posizione ed impulso a tutti i tempi t.

(e) Considerare il caso in cui $\lambda = 0$ e supporre che al tempo $t = 0$ venga eseguita una misura di impulso. Determinare i possibili risultati di questa misura e le loro probabilità, e determinare nuovamente i valori medi per una successiva misura di impulso a tutti i tempi t.