PROBLEMI DI FISICA QUANTISTICA

PRIMA PARTE
anno accademico 2023-2024

(1) Si consideri una oggetto quantistico che può passare attraverso uno schermo trasparente, diviso in due zone sia orizzontalmente che verticalmente. Lo schermo può essere equipaggiato da rivelatori che segnalano se l'oggetto passa nella parte alta o bassa e nella parte sinistra o destra dello schermo. Si denota con un ket $|ij\rangle$ lo stato del sistema quando esso è stato rivelato in una delle quattro zone, dove $i = 0, 1$ indica che l'oggetto è rispettivamente passato a sinistra o destra, e $j = 0, 1$ in alto o in basso. Quindi il ket $|00\rangle$ è lo stato in cui si trova l'oggetto quando è stato rivelato nel quadrante in alto a sinistra e così via.

Si supponga che l'oggetto quando incide sullo schermo si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{1}{3}} \left(|00\rangle + |01\rangle \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} i \left(|10\rangle - |11\rangle \right) \right] \tag{1}$$

(a) Qual è la probabilità che l'oggetto venga rivelato in ciascuna delle quattro zone dello schermo?
come si calcola la probabilità dei risultati di una misura?

(b) Qual è la probabilità che l'oggetto venga rivelato nella parte sinistra dello schermo? E nella parte alta?
come si combinano le probabilità?

(c) Qual è la probabilità che l'oggetto *non* venga rivelato nella parte sinistra dello schermo?
come si calcola la probabilità che un evento non accada?

(d) Se solo il rivelatore destra-sinistra è attivato, ed esso rivela che l'oggetto non è passato nella parte sinistra dello schermo (ma si ha la certezza che esso sia passato attraverso lo schermo) in che stato si trova l'oggetto subito la misura da parte di questo rivelatore?
In che stato si trova un sistema dopo la misura? Spiegare la misura come proiezione.

(2) Si supponga ora che l'oggetto della domanda precedente possa arrivare sullo schermo passando da due fenditure, A e B. Se passa dalla fenditura A, si trova nello stato Eq. (1), ma se invece passa dalla fenditura B si trova nello stato

$$|\phi\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{1}{3}} \left(|00\rangle + |01\rangle \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} i \left(|10\rangle - |11\rangle \right) \right] \tag{2}$$

Nel caso della domanda precedente solo la fenditura A era aperta.

(a) Se invece è aperta solo la fenditura B, la risposta a ciascuna delle domande del punto precedente cambia, se cambia, e come?
Da che cosa dipendono le probabilità? E gli stati?

(b) Se sono aperte entrambe le fenditure, in che stato si trova il sistema, supponendo che passi dall'una o dall'altra fenditura con uguale probabilità e senza acquisire una fase relativa?
Che cosa dice il principio di sovrapposizione?

(c) Se la fase dello stato $|\phi\rangle$ cambia per un fattore i, cambia il risultato della risposta alle due domande precedenti, e se sì come?
Quando è misurabile una fase?

(3) Si supponga di essere nella situazione delle due domande precedenti; si sa che è aperta solo una delle due fenditure, o A o B, ma non si sa quale. L'oggetto non viene rivelato nella parte alta dello schermo.

(a) È possibile distinguere a posteriori, con una misura opportuna, il caso in cui è aperta la fenditura A da quello in cui è aperta B?
Gli stati in cui si trova il sistema nell'uno o nell'altro caso sono ortogonali?

(b) Se, oltre che non essere rivelato nella parte alta, l'oggetto è rivelato nella zona sinistra, la risposta alla domanda precedente cambia?
In che stato si trova il sistema in tal caso e qual è la sua sovrapposizione con gli stati $|\phi\rangle$ *e* $|\psi\rangle$*?*

(c) Se sappiamo che l'oggetto non si trova in nessuno dei due stati corrispondenti ai due casi considerati al punto (a) — ossia né nello stato in cui si trova quando è aperta solo la fenditura A, né quando è aperta solo la fenditura B — possiamo dire in che stato si trova?
Gli stati dati formano una base?

(4) Si supponga ora di essere nella situazione della domanda (2b) (entrambe le fenditure aperte). È possibile eseguire una misura sull'oggetto dato, immediatamente prima del suo passaggio attraverso lo schermo, tale per cui la probabilità di passare subito dopo sia nella parte destra che in quella sinistra dello schermo siano nonnulle entrambe? Se sì, questa misura è unica?
Come si fa a rigenerare uno stato?

(5) Considerare ora un sistema quantistico che può trovarsi in quattro stati esaustivi ed esclusivi, indicati come $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, e considerare gli stati del sistema

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|00\rangle + (1+i)|01\rangle\right] \tag{3}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i|00\rangle + |10\rangle\right], \tag{4}$$

$$|\psi_3\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle, \tag{5}$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|10\rangle + |11\rangle\right]. \tag{6}$$

(a) Determinare la probabilità che un sistema preparato nello stato $|00\rangle$ venga rivelato in ciascuno dei quattro stati $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_4\rangle$.
Come si calcola la probabilità che un sistema preparato in uno stato venga rivelato in un altro stato?

(b) Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\phi\rangle = N\left[|\psi_1\rangle + 2i\sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle\right]. \tag{7}$$

Determinare la costante di normalizzazione N. Determinare inoltre la probabilità che un sistema preparato in questo stato venga rivelato nello stato $|00\rangle$.
Qual è l'espressione dello stato dato in termini degli stati di base?

(c) Supporre che su un sistema che si trova nello stato $|\phi\rangle$ Eq. (7) venga eseguita una prima misura che rivela che si trova nello stato $|\psi_2\rangle$. Qual è la probabilità di trovare questo risultato? Qual è probabilità che una successiva misura riveli il sistema nello stato $|00\rangle$?
Attenzione: gli stati $|\psi_1\rangle$ *e* $|\psi_2\rangle$ *sono ortogonali?*

(6) Nella situazione della domanda 1, considerare un'osservabile O_1 che prende il valore $+1$ quando l'oggetto è rivelato nella parte alta dello schermo, e 0 quando è rivelata nella parte bassa e un'osservabile O_2 che prende il valore $+1$ quando l'oggetto è rivelato nella parte sinistra dello schermo, e 0 quando è rivelata nella parte destra.

(a) Scriverere la matrice dei due operatori O_1 e O_2 nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$.
come è definita la matrice associata ad un operatore?

(b) Determinare il valor medio dei risultati della misura dell'osservabile associata agli operatori O_1 e O_2 per il sistema della domanda (1) che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1).
come si calcola il valore medio di una misura?

(c) Come cambia il risultato delle domande precedenti se per entrambi gli operatori si sotituisce il valore 0 con il valore -1?
che tipo di operatore sono O_i nel primo caso?

(7) Nella situazione delle domande (1-2), considerare l'operatore associato all'osservabile O, che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1) e 0 quando il sistema non viene rivelato nello stato $|\psi\rangle$ (ossia se viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi\rangle$).

(a) Scrivere la matrice dell'operatore associato a questa osservabile, nella base degli stati $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$
come si scrive l'operatore associato ad un'osservabile?

(b) Se un sistema è preparato nello stato $|\phi\rangle$ Eq. (2), quali sono i possibili valori di una misura dell'osservabile O, qual è la probabilità di trovare ciascuno di questi valori, e in che stato si trova il sistema dopo la misura in ciascun caso?
che cosa succede quando si misura un'osservabile?

(c) Supporre che il sistema si trovi in uno stato qualunque $|\chi\rangle$ e che venga effettuata una misura dell'osservabile O. Determinare i due operatori Π_1 e Π_2 che agendo sullo stato $|\chi\rangle$ restituiscono (a meno della normalizzazione) lo stato in cui il sistema si trova dopo la misura, a seconda dei due risultati possibili della misura.
che proprietà hanno gli operatori cercati?

(8) Siano A e B operatori hermitiani e sia $C = A\,B$.

(a) Determinare l'operatore $C^\dagger$ in termini di A e B.
come agisce C?

(b) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = C^\dagger$?
Che forma hanno C e $C^\dagger$ in termini di A e B?

(c) Quale condizione devono soddisfare A e B affinché $C = -C^\dagger$?
Che forma hanno C e $C^\dagger$ in termini di A e B?

(d) Dimostrare che C può sempre essere scritto come somma di un operatore hermitiano e di un operatore anti-hermitiano e scrivere l'espressione esplicita della parte hermitiana e della parte antihermitiana di C in termini di A e B. $C = -C^\dagger$.
Posso sempre scrivere C come somma di termini aventi la forma di quelli considerati ai punti precedenti?

(9) Per un sistema di un qubit, considerare gli stati $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \pm |1\rangle\right)$.

(a) Scrivere in notazione ket-bra l'operatore lineare $\mathcal{H}$ che agendo sullo stato $|0\rangle$ lo trasforma nello stato $|+\rangle$ e agendo sullo stato $|1\rangle$ lo trasforma nello stato $|-\rangle$ (operatore di Hadamard).

Come agisce un operatore su uno stato?

(b) Scrivere la matrice associata all'operatore $\mathcal{H}$ nella base degli stati $|0\rangle$, $|1\rangle$.
Come si calcola la matrice associata ad un operatore?

(10) Si determini la matrice che per un singolo qubit fa passare dalla base degli stati $|i\rangle$ alla base degli stati $|\pm\rangle$ della domanda precedente. *Come si determinano le componenti della matrice di cambiamento di base in termini dei vettori di base?*

(11) Per ciascuno dei seguenti operatori, si determini se siano o meno unitari e/o hermitiani:

(a) l'operatore O della domanda (7);
Che tipo di operatore è?

(b) l'operatore $\mathcal{H}$ della domanda (9);
Che cosa succede se lo applico due volte di fila?

(c) gli operatori Π_1 e Π_2 determinati al punto (c) della domanda (7).
La misura è reversibile?

(12) Per uno stato di due qubit $|ij\rangle$, con i, $j = 0$, 1 si determinino le matrici dei seguenti operatori, e si discuta se siano unitari e/o hermitiani:

(a) l'operatore che scambia i due qubit (SWAP);

(b) l'operatore che se il primo qubit vale 0 lascia il secondo qubit invariato, e se il primo qubit vale 1 trasforma il valore del secondo qubit in 0 se esso vale 1 e viceversa (CNOT).
In entrambi i casi, la trasformazione data è reversibile? Che cosa succede se la si applica due volte?

(13) Considerare gli operatori O_1, O_2, O delle domande 6-7.

(a) Determinare se siano compatibili o meno.
Qual è la condizione di compatibilità (e qual è il suo significato fisico?)

(b) Determinare se alcuni di essi formino un insieme completo di operatori.
Qual è la condizione di completezza (e qual è il suo significato fisico?)

(14) Considerare gli stati $|\pm\rangle$ e $|i\rangle$ delle domande 9-10, e gli operatori P e Q associati alle osservabili che prendono i valori ± 1 rispettivamente quando il sistema si trova negli stati $|\pm\rangle$ (osservabile P) o quando il sistema si trova negli stati $|0\rangle$, $|1\rangle$ (osservabile Q).

(a) Determinare la relazione di indeterminazione per questa coppia di operatori.
Qual è la forma della relazione di indeterminazione?

(b) Verificare che la relazione di indeterminazione è soddisfatta sugli autostati di P e spiegare il risultato.
Qual è il valore massimo che l'indeterminazione può assumere in uno stato di un qubit?

(c) Determinare il o gli stati di minima indeterminazione, ossia gli stati per i quali la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza. Determinare quindi l'indeterminazione si P e Q in questi stati.
A quali condizioni la relazione di indeterminazione vale con l'uguaglianza?

(15) Si consideri un sistema di un qubit i cui due stati $|0\rangle$, $|1\rangle$ sono autostati di un'osservabile O che soddisfano le equazioni agli autovalori

$$O|0\rangle = |0\rangle; \qquad O|1\rangle = -|1\rangle. \tag{8}$$

(a) Il sistema viene preparato in un certo stato $|\psi\rangle$, oppure in un altro stato $|\phi\rangle$, e quindi viene effettuata una misura di O. L'operazione (preparazione seguita da misura) è ripetuta più volte. Quando il sistema viene preparato in $|\psi\rangle$ la misura dà sempre come risultato -1, mentre quando il sistema viene preparato in $|\phi\rangle$ la misura dà $+1$ in $\frac{1}{3}$ dei casi, e -1 in $\frac{2}{3}$ dei casi. Scrivere la più generale forma dei vettori di stato $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ nella base computazionale (base degli autostati di O).
Qual è la più generale parametrizzazione di uno stato quantistico?

(b) Da quanti parametri dipende ciascuno dei vettori di stato della domanda precedente, quali e quanti di questi parametri sono inosservabili, e quali invece corrispondono a proprietà misurabili del sistema?
Quali sono i parametri osservabili?

(c) Qual è la probabilità che un sistema preparato nello stato $|\phi\rangle$ venga rivelato nello stato $|\psi\rangle$? Il risultato è univocamente determinato, o dipende da qualcuno dei parametri da cui dipendono $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$?
Da quali parametri dipende il prodotto scalare fra gli stati dati?

(d) Si cosideri un'osservabile P, avente spettro non degenere e tale che lo stato $|\phi\rangle$ della domanda (a) sia autostato di P. Le osservabili O e P sono compatibili? La risposta dipende dal fatto che lo spettro di P sia degenere o meno?
Che succede se lo spettro di P è degenere?

(e) Determinare il valor medio e l'indeterminazione dei risultati delle misure di O in ciascuno dei due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$.
Come si calcola l'indeterminazione?

(f) Determinare il vincolo posto dal principio di indeterminazione sul prodotto delle indeterminazioni delle misure di P e O negli stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. Giustificare il risultato.
Qual è il valore massimo che l'indeterminazione può assumere in uno stato di un qubit?

(g) Costruire uno stato $|\chi\rangle$ tale che il posto dal principio di indeterminazione sul prodotto delle indeterminazioni delle misure di P e O in tale stato sia non-banale (cioè non si riduca alla condizione $0 \geq 0$).
In quali stati l'inderminazione per un dato operatore è diversa da zero?

(16) Nella situazione della domanda (2) considerare un insieme di oggetti che vengono tutti rivelati nella parte alta dello schermo (caratterizzata da $j = 0$). Le fenditure sono equipaggiate mediante un rivelatore, però non si riesce a mettere il rivelatore in coincidenza con il passagggio degli oggetti e dunque non si sa da quale fenditura sia passato ciascuno di essi. Si sa solo che hanno 50% di probabilità di passare da ciascuna fenditura.

(a) Determinare la matrice densità per il sistema dato.
quali sono gli stati in cui si può trovare ciascuno degli oggetti e qual è la loro probabilità?

(b) La matrice densità tovata è unica? Se non lo è, dare un esempio di una diversa sovrapposizione di stati (diversi stati e diverse probabilità) che corrisponde alla stessa matrice densità.
qual è la forma della matrice densità data in una base ortonormale?

(c) Dato un insieme di oggetti descritto da questa matrice densità, qual è il valor medio della misura delle osservabili date dalle matrici di Pauli?
Come si calcola questo valor medio?

(d) Se invece che le osservabili date dalle matrici di Pauli si misurano le osservabili associate agli operatori O_1, O_2, O delle domande (6)-(7) e (13), è possibile determinare completamente questa matrice densità?
quanti parametri determinano completamente la matrice densità per uno stato misto?

(17) Da quanti parametri dipende la matrice densità per un sistema che si trova in uno stato puro, e da quanti se si trova in uno stato misto

(a) per un sistema di un qubit
Qual è la forma della più generale matrice densità?

(b) per un sistema di due qubit.
Che proprietà deve avere la più generale matrice densità?

(18) Calcolare l'integrale

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y^2 - x^2) f(y) dy. \tag{9}$$

Qual è il cambio di variabili che porta la delta di Dirac alla sua forma solita, e come si trasformano la misura e i limiti di integrazione sotto questo cambio di variabili?

(19) Si consideri un sistema invariante per dilatazioni, $q \to q' = \lambda q$:

(a) Determinare, mediante il teorema di Noether, la quantità classicamente conservata (detta viriale).
ricordare l'enunciato del teorema di Noether e il suo significato fisico.

(b) Determinare l'operatore quantistico che si ottiene prendendo il viriale classico, e sostituendo q e p con gli operatori quantistici corrispondenti. Discutere se l'operatore che si ottiene sia o meno hermitiano.
qual è l'aggiunto di un prodotto di operatori?

(c) Determinare come si trasforma sotto dilatazioni un autostato della posizione e determinare la condizione di normalizzazione degli operatori trasformati.
come si trasforma sotto dilatazioni la delta di Dirac?

(d) Determinare l'operatore hermitiano che genera le dilatazioni sugli stati quantistici $|q\rangle$, e discutere la sua relazione con la quantità classica ottenuta al punto (b).
come agisce Δ per piccole dilatazioni nella rappresentazione delle coordinate?

(20) Definire l'operatore $\mathcal{P}$ (operatore parità) i cui elementi di matrice soddisfano

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x), \tag{10}$$

dove $|\psi\rangle$ è uno stato qualunque e $|x\rangle$ sono autofunzioni della posizione.

(a) Determinare le autofunzioni e gli autovalori di P.
Quanto vale $\mathcal{P}^2$?

(b) Determinare gli elementi di matrice del commutatore $[\mathcal{P}, T]$, dove T è l'operatore traslazione, fra autostati della posizione, ed in particolare discutere se esso si annulli o meno.
Come agiscono $\mathcal{P}$ e T sugli autostati della posizione?

(c) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sull'operatore posizione, ossia determinare $\mathcal{P}^{-1}\hat{q}\mathcal{P}$.
Quanto valgono gli elementi di matrice dell'operatore trasformato fra autostati della posizione?

(d) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sull'operatore traslazione, ossia determinare $\mathcal{P}^{-1}T\mathcal{P}$.
Quanto valgono gli elementi di matrice dell'operatore trasformato fra autostati della posizione?

(e) Determinare gli elementi di matrice $\langle q|[\hat{p},\mathcal{P}]|\psi\rangle$, $\langle q|[|\hat{p}|,\mathcal{P}]|\psi\rangle$, $\langle k|[\hat{p},\mathcal{P}]|\psi\rangle$, $\langle k|[|\hat{p}|,\mathcal{P}]|\psi\rangle$, dove $|q\rangle$ e $|k\rangle$ sono autostati della posizione e dell'impulso rispettivamente, $\hat{p}$ è l'operatore impulso, $|\hat{p}|$ è l'operatore

$$|\hat{p}| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hbar |k| |k\rangle\langle k|. \tag{11}$$

e $|\psi\rangle$ è uno stato generico
Che relazione c'è fra l'operatore impulso l'operatore traslazione considerato al punto precedente?

(21) Calcolare i seguenti commutatori (si intende che x e p indicano sempre i corrispondenti operatori)

(a) $[x, p^2]$;

(b) $[x^2, p]$;

(c) $[x^2, p^2]$;
Come si calcola il commutatore del prodotto di operatori??

(d) $[p, \exp(\lambda x)]$.
Come si definisce la funzione di un operatore?

(e) $[x, \exp(\lambda p)]$.
Come agisce l'operatore posizione nello spazio degli impulsi?

(22) Considerare una coppia di funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ normalizzabili in senso proprio e aventi le proprietà

$$\psi_0(-x) = \psi_0(x) = \psi_0^*(x), \tag{12}$$

$$\psi_1(x) = N\frac{d}{dx}\psi_0(x), \tag{13}$$

dove N è una costante reale e positiva. Considerare infine la funzione d'onda

$$\psi_2(x) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x), \tag{14}$$

con c_1 e c_2 costanti complesse tali che $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

(a) Dimostrare che gli stati aventi funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sono ortogonali.
Se le funzioni d'onda sono normalizzabili in senso proprio ed integriamo per parti, quanto valgono i termini di superficie?

(b) Dimostrare che se gli stati aventi funzioni d'onda $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sono normalizzati allora anche lo stato avente funzione d'onda $\psi_2(x)$ è normalizzato.
Che forma ha la condizione di normalizzazione per ψ_2?

(c) Calcolare i valori medi degli operatori posizione ed impulso negli stati aventi funzione d'onda $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$.
Nel calcolo dei valori medi della posizione, qual è la parità dell'integrando? Nel calcolo dei valori medi dell'impulso, che succede se si integra per parti?

(d) Dimostrare che

$$\langle\psi_0|[x^2, p^2]|\psi_o\rangle = 0. \tag{15}$$

Il commutatore è reale o immaginario? (usando le proprietà date).

(23) Considerare l'operatore $O = \hat{x}\hat{p}^n$ dove $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sono gli operatori posizione e impulso ed n è intero positivo.

(a) Dimostrare che O non è hermitiano e calcolare la differenza $D = O - O^\dagger$.
Come si calcola l'aggiunto di un prodotto di operatori? Si può esprimere D in termini di un commutatore noto?

(b) Calcolare esplicitamente l'elemento di matrice $\langle\psi|O^\dagger|\phi\rangle$ nella base delle coordinate in termini delle funzioni d'onda $\langle x|\phi\rangle = \psi(x)$ $\langle x|\phi\rangle = \phi(x)$, usando la definizione di aggiunto di un operatore. Verificare che coincide con l'elemento di matrice dell'operatore $O + D$, dove D è stato determinato al punto precedente.
Su che cosa agisce l'operatore $\hat{p}$ quando si calcola l'elemento di matrice di O? E l'elemento di matrice di $O^\dagger$?

(c) Ripetere il calcolo al punto precedente ma ora usando la base degli impulsi.
Che forma ha l'operatore posizione nella base degli impulsi?

(24) Considerare un sistema di un qubit, la cui evoluzione temporale è data dalla Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega\left(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right) \tag{16}$$

Al tempo $t = 0$ viene effettuata una misura dell'operatore

$$A = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| \tag{17}$$

che dà come risultato l'autovalore $+1$.

(a) Determinare il valor medio e l'indeterminazione di una misura di A ad ogni tempo successivo t. Giustificare la dipendenza o indipendenza dal tempo del risultato.
L'operatore A è diagonalizzabile simultaneamente alla hamiltoniana? Qual è l'espressione dell'autostato dato di A in termini di autostati della hamiltoniana?

(b) Definito inoltre l'operatore

$$B = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \tag{18}$$

determinare anche il valor medio e l'indeterminazione di una misura di B ad ogni tempo successivo t.

(c) Verificare che ad ogni tenpo t le indeterminazioni di A e B soddisfano il principio di indeterminazione.
Gli operatori A e B sono diagonalizzabili simultaneamente?

(25) Considerare un sistema di un qubit, la cui evoluzione temporale può essere data da una Hamiltoniana i cui elementi di matrice sono

$$H_1 = E_0\sigma_2, \tag{19}$$

(indipendente dal tempo) oppure dalla hamiltoniana dipendente dal tempo

$$H_2(t) = E_0 t\sigma_2, \tag{20}$$

dove E_0 è una costante reale positiva e σ_2 è una matrice di Pauli.

(a) Determinare esplicitamente l'operatore di evoluzione temporale in entrambi i casi.
Qual è l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale per hamiltoniane che a tempi diversi commutano?

(b) Nel caso della hamiltoniana H_1, se al tempo $t = 0$ il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $A = \sigma_3$, qual è la probabilità che al tempo t esso si trovi nell'altro autostato dello stesso operatore?
Qual è la relazione fra la probabilità richiesta e gli elementi di matrice dell'operatore di evoluzione temporale?

(c) Rispondere di nuovo alla domanda precedente, ma nel caso in cui il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $B = \sigma_1$.
Il risultato è diverso o uguale a quello del caso precedente?

(d) Rispondere di nuovo alla domanda precedente, ma nel caso in cui il sistema è preparato in un autostato dell'operatore $C = \sigma_2$.
Che cosa succede se il sistema si trova in un autostato della hamiltoniana ?

(e) Utilizzare la risposta alla domanda precedente per calcolare nuovamente la probabilità del punto (b) ma *senza* usare l'espressione esplicita dell'operatore di evoluzione temporale.
Che forma ha lo stato in cui è stato preparato il sistema nella base degli autostati della hamiltoniana?

(26) (a) Dimostrare che in un autostato della hamiltoniana

$$\langle [A, H] \rangle = 0 \tag{21}$$

per qualunque operatore A.
Quanto vale l'elemento di matrice di H in un suo autostato?

(b) Determinare, per uno stato generico, e per una hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}), \tag{22}$$

la dipendenza temporale, usando la rappresentazione di Schrödinger, del valor medio di $\hat{v}$, $\frac{d}{dt}\langle \hat{v} \rangle$, dove $\hat{v}$ è l'operatore viriale

$$\hat{v} = \frac{1}{2}\left(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}\right). \tag{23}$$

Come si calcola la dipendenza dal tempo di un elemento di matrice in termini della dipendenza dal tempo degli stati?

(c) Utilizzare i risultati delle domande precedenti per dimostrare che, per un potenziale della forma

$$V(\hat{q}) = \hat{q}^{\alpha}, \tag{24}$$

i valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in un autostato di energia sono proporzionali, e determinare il coefficiente di proporzionalità (*teorema del viriale*).
Come depende dal tempo il valor medio di $\hat{v}$?

(d) Determinare ora la dipendenza dal tempo in rappresentazione di Heisenberg dell'operatore $\hat{v}$ e confrontare con il risultato al punto (b).
Che forma hanno le equazioni del moto di Heisenberg?

(e) Determinare la condizione generale per cui si conservano gli autovalori di $\hat{v}$, e la simmetria associata a questa legge di conservazione.
Qual è la traformazione generata da $\hat{v}$? Ricordare il problema 13.

(27) Considerare il sistema della domanda (15), e supporre che la sua evoluzione temporale sia determinata dalla hamiltoniana

$$H = E\left[|0\rangle\langle 0| + \sqrt{2}\left(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\right)\right], \tag{25}$$

dove E è una costante reale positiva con dimensioni di un'energia.

(a) Determinare lo spettro di autovalori e di autostati di energia. La hamiltoniana è compatibile con l'operatore O dato dalla Eq. 8?
Gli autostati della hamiltoniana sono anche autostati di O?.

(b) Determinare la probabilità che, se il sistema al tempo $t = 0$ viene preparato nello stato $|0\rangle$, una misura al tempo t lo riveli nello stato $|\psi\rangle$ della domanda (15a).
Come si scrivono gli autostati della hamiltoniana in termini di autostati di O?.

(c) Dimostrare che esiste una particolare scelta dei parametri da cui dipende il vettore di stato $|\phi\rangle$ della domanda (15a), tale per cui diventa indipendente dal tempo la probabilità che, se il sistema al tempo $t = 0$ viene preparato nello stato $|1\rangle$, una misura al tempo t lo riveli in tale stato $|\phi\rangle$. Dimostrare inoltre che questa scelta determina completamente lo stato $|\phi\rangle$ stesso.
Che condizione deve soddisfare $|\phi\rangle$ affinché questo accada?

(d) Determinare la matrice densità per un sistema tale che i risultati delle misure dell'osservabile O siano gli stessi di quando il sistema è preparato nello stato $|\phi\rangle$ della domanda sapendo che il sistema si trova in un autostato dell'energia.
Che condizione deve soddisfare $|\phi\rangle$ perché sia un autostato di energia?.

(28) Considerare il sistema della domanda (5), e supporre che la sua evoluzione temporale sia data dalla hamiltoniana $H = EO$, dove O è l'operatore associato all'osservabile che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|\psi_2\rangle$ Eq. (4), e 0 quando il sistema viene rivelato in qualunque stato ortogonale a $|\psi_2\rangle$.

(a) Determinare i possibili valori di energia e la probabilità che una misura di energia per un sistema preparato nello stato $|\psi_1\rangle$ fornisca ciascuno di questi valori.

(b) Determinare la probabilità che il sistema, preparato nello stato $|00\rangle$ al tempo $t = 0$, sia rivelato al tempo $t = T$ nello stato $|01\rangle$.
Qual è l'azione della hamiltoniana sullo stato $|01\rangle$?

(c) Determinare la probabilità che il sistema, preparato nello stato $|00\rangle$ al tempo $t = 0$ al tempo $t = T$ sia rivelato nello stato $|10\rangle$.
Qual è l'espressione dello stato $|10\rangle$ in termini degli autostati della hamiltoniana?

(d) Definire l'operatore associato all'osservabile O', che prende il valore $+1$ quando il sistema viene rivelato nello stato $|00\rangle$ e -1 quando il sistema viene rivelato nello stato $|10\rangle$. Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per questo operatore.
Qual è l'espressione dell'operatore associato ad O' in forma matriciale?

(e) Determinare esplicitamente l'operatore alla Heisenberg O' e le sue autofunzioni a qualunque tempo t.
Qual è l'espressione dell'operatore alla Heisenberg a tempo generico?

(29) Considerare la hamiltoniana che descrive il moto di una particella soggetta ad una forza costante (potenziale lineare)

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \kappa \hat{x}. \tag{26}$$

(a) Discutere quali fra i seguenti operatori possano essere diagonalizzati simultaneamente: H, $\hat{x}$, $\hat{p}$, T, V, dove T e V sono rispettivamente gli operatori energia cinetica ed energia potenziale.
Come si calcola il commutatore di una funzione di $\hat{p}$ e $\hat{q}$?

(b) Determinare la dipendenza dal tempo degli operatori T e V in rappresentazione di Heisenberg sia in forma differenziale che integrale. Confrontare con il risultato classico.
Che relazione c'è fra la legge del moto quantistica e quella classica? (teorema di Ehrenfest)

(c) Intepretare il risultato della domanda precedente in termini di proprietà di invarianza della hamiltoniana.

(d) Determinare la a dipendenza dal tempo di $\hat{x}$ e $\hat{p}$ e interpretare il risultato in termini delle proprietà di invarianza della hamiltoniana.
Per entrambe le domande precedenti: quali sono le trasformazioni generate da $\hat{p}$ e da $\hat{q}$?

(30) Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x, \tag{27}$$

dove x e p sono i consueti operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva. Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$, la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\langle x|\psi\rangle = N \left(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\right) e^{-\lambda x^2}, \tag{28}$$

dove λ è una costante reale positiva.

(a) Determinare il valor medio di una misura di posizione al tempo $t = 0$.
(b) Determinare il valor medio di una misura di impulso al tempo $t = 0$.
(c) Scrivere e risolvere le equazioni di Heisenberg per gli operatori x e p per il sistema dato.
(d) Determinare i valori medi per una misura di posizione ed impulso a tutti i tempi t.
(e) Considerare il caso in cui $\lambda = 0$ e supporre che al tempo $t = 0$ venga eseguita una misura di impulso. Determinare i possibili risultati di questa misura e le loro probabilità, e determinare nuovamente i valori medi per una successiva misura di impulso a tutti i tempi t.

(31) Considerare una particella libera di massa m in una dimensione, la cui funzione d'onda al tempo $t = 0$ è

$$\psi(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|} e^{ikx} \tag{29}$$

con α e k reali, e $\alpha > 0$.

(a) Determinare i valori medi $\langle x\rangle$ e $\langle p\rangle$ di posizione e impulso nello stato dato.
(b) Determinare i valori medi $\langle x\rangle$ e $\langle p\rangle$ per ogni tempo t.
(c) Dimostrare che il valor medio di p^2 nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (1) è dato da

$$\langle p^2\rangle = \langle\phi|\phi\rangle, \tag{30}$$

dove lo stato $|\phi\rangle$ è dato da $|\phi\rangle = p|\psi\rangle$.
(d) Calcolare l'indeterminazione $\Delta^2 p$ dell'impulso nello stato dato.
(e) Determinare anche l'indeterminazione in posizione $\Delta^2 x$ al tempo $t = 0$.
(f) Confrontare le indeterminazioni treovate con il principio di indeterminazione di Heisenberg. Discutere che cosa succede nel limite $\alpha \to \infty$

(32) Determinare l'indeterminazione in posizione al tempo t per una particella libera che al tempo $t = 0$ è nello stato

$$\psi(x) = N \exp - \frac{x^2}{\beta - i\gamma} \tag{31}$$

e discutere se essa sia o meno una funzione monotona.

(33) Considerare una particella libera che al tempo $t = 0$ si trova nello stato avente funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = N \left[e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2} + e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}\right], \tag{32}$$

con $|N|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{1+e^{-\alpha x_0^2}}$, correttamente normalizzato ad uno.

(a) Determinare la funzione d'onda al tempo $t = 0$ nella base degli impulsi.

(b) Determinare la funzione d'onda al tempo t.

(c) Determinare la la densità di probabilità per misure di posizione al tempo t e interpretarne fisicamente i vari termini.

(34) Considerare una particella libera di massa m in una dimensione, la cui funzione d'onda al tempo $t = 0$ nella base delle coordinate è data da

$$\langle x|\psi\rangle = Nf(x), \tag{33}$$

dove

$$f(x) \equiv e^{ik_0 x} e^{-\alpha x^2/2}; \qquad N \equiv \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{34}$$

e α e k_0 sono numeri reali positivi.

(a) Determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso e le loro indeterminazioni nello stato dato.

(b) Determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso e le loro indeterminazioni a qualunque tempo successivo t.

(c) Sviluppare la funzione d'onda del sistema su una base di autofunzioni dell'energia, e scriverne l'espressione a qualunque tempo t.

(d) Dimostrare che la funzione d'onda al tempo t si può scrivere come

$$\psi(x,t) = e^{i\lambda(t)} \bar{N} \bar{f}(x,t), \tag{35}$$

dove la fase $\lambda(t)$ è una funzione reale del tempo e dei parametri del problema,

$$\bar{N} = \frac{N}{\sqrt{z(t)}}, \tag{36}$$

e $\bar{f}(x,t)$ si ottiene dalla funzione $f(x)$ Eq. (34) mediante le due sostituzioni

$$x \to x(t) \equiv x - \frac{\hbar k_0}{m} t; \qquad \alpha \to \alpha(t) \equiv \frac{\alpha}{z(t)}, \tag{37}$$

dove $z(t)$ è una funzione complessa del tempo e dei parametri del problema. Determinare le funzioni $\lambda(t)$ e $z(t)$.

(e) Scrivere la densità di probabilità dei risultati di una misura di posizione al tempo t, ed utilizzare il risultato per determinare l'indeterminazione in posizione ad ogni tempo, confrontando con il risultato della domanda (2).

(f) Determinare il valor medio dell'operatore $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ nello stato in cui il sistema si trova al tempo t.

(g) Determinare la densità di probabilià di posizione nel limite $\alpha \to \infty$ sia al tempo $t = 0$ che a qualunque altro tempo t. Commentare il risultato alla luce del principio di indeterminazione.

(35) Calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso $\Delta^2 x$ e $\Delta^2 p$ nell n-esimo autostato di energia di una buca di potenziale infinitamente profonda. Confrontare il risultato con il principio di indeterminazione.

(36) Considerare una sistema in una buca di potenziale infinitamente profonda, avente hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V_0(x) \tag{38}$$

con

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \le a \\ \infty \text{ se } |x| > a \end{cases}, \tag{39}$$

dove a è una costante reale positiva. Supporre che il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|1\rangle + i\sqrt{2}|2\rangle \right) \tag{40}$$

dove $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato della hamiltoniana data.

(a) Determinare i possibili risultati di una misura di energia oppure di una misura di impulso per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (40) e le loro probabilità.

(b) Determinare i valori medi di posizione, impulso ed energia nello stato $|\psi\rangle$.

(c) Determinare i valori medi di posizione ed energia ad ogni tempo t per un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (40) al tempo $t = 0$ e la cui evoluzione temporale è governata dalla hamiltoniana H_0. Discutere se essi dipendano dal tempo e perché.

(d) Considerare ora la hamiltoniana

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + V_1(x) \tag{41}$$

con potenziale

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } 0 \le x \le 2a \\ \infty \text{ se } x > 2a \end{cases}, \tag{42}$$

Determinare la trasformazione che collega gli autostati della hamiltoniana H_0 a quelli della hamiltoniana H_1 ed utilizzare il risultato per determinare lo spettro di autovalori della hamiltoniana H_1 noto quello della hamiltoniana H_0.

(e) Considerare infine un sistema che si trova in uno stato della forma data dalla Eq. (40), ma dove ora la hamiltoniana è H_1 Eq. (42), e $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono il suo stato fondamentale ed il suo primo stato eccitato. Determinare i valori medi di posizione, impulso ed energia in questo stato.

(37) Considerare un sistema unidimensionale soggetto al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \le a \\ \infty \text{ se } |x| > a \end{cases}, \tag{43}$$

dove a è una costante reale positiva (buca infinita).

(a) Siano dati i seguenti stati del sistema:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle + i|2\rangle \right), \tag{44}$$

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2\rangle + i|4\rangle \right), \tag{45}$$

dove $|1\rangle$ è lo stato fondamentale, $|2\rangle$ il primo stato eccitato e così via.
Scrivere le funzione d'onda per gli stati $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ nella base delle coordinate.
Determinare quindi i seguenti valori medi: $\langle\psi|p|\psi\rangle$, $\langle\psi|H|\psi\rangle$, $\langle\varphi|p|\varphi\rangle$, $\langle\varphi|H|\varphi\rangle$, dove p e H sono rispettivamente gli operatori impulso e hamiltoniana.
Utilizzare gli integrali elementari

$$\int_{-a}^{a} \sin^2 \frac{x\pi}{a}\,dx = \int_{-a}^{a} \sin^2 \frac{x\pi}{2a}\,dx = \int_{-a}^{a} \cos^2 \frac{x\pi}{2a}\,dx = a \tag{46}$$

$$\int_{-a}^{a} \sin \frac{x\pi}{a} \sin \frac{x\pi}{2a}\,dx = 2\int_{-a}^{a} \cos \frac{x\pi}{a} \cos \frac{x\pi}{2a}\,dx = \frac{8a}{3\pi} \tag{47}$$

$$\int_{-a}^{a} \sin \frac{x\pi}{a} \cos \frac{x\pi}{2a}\,dx = \int_{-a}^{a} \cos \frac{x\pi}{a} \sin \frac{x\pi}{2a}\,dx = 0 \tag{48}$$

$$\tag{49}$$

(b) Supporre che il sistema si trovi nello stato $|\varphi\rangle$. Si esegua una misura di energia oppure di impulso sul sistema. Determinare i risultati di queste misure e le rispettive probabilità.

(c) Determinare i valori medi di impulso ed energia a qualunque tempo t, supponendo che al tempo $t = 0$ esso si trovi nello stato $|\psi\rangle$ oppure nello stato $|\varphi\rangle$ Giustificare la dipendenza od indipendenza dal tempo di questi valori medi.

(d) Supporre che il sistema si trovi nello stato $|\varphi\rangle$ (come al punto (b)). Scrivere la matrice densità del sistema al tempo t. Quali sono i risultati di una misura di impulso al tempo t e le rispettive probabilità? Scrivere la matrice densità dopo la misura.

(e) Al tempo $t = t_0$ le pareti della buca si spostano da $x = \pm a$ a $x = \pm 2a$, ovvero il potenziale diventa

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \leq 2a \\ \infty \text{ se } |x| > 2a \end{cases}. \tag{50}$$

Si definisca l'operatore parità $\mathcal{P}$, che agisce come

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \langle -x|\psi\rangle. \tag{51}$$

Mostrare se gli autovalori di $\mathcal{P}$ siano conservati o no per ogni tempo t.

(f) Eseguire una misura di energia sul sistema al tempo $t = t_0 - \epsilon$ (cioè subito prima dello spostamento della parete) e supporre di avere trovato come risultato $E = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$. Utilizzando il risultato della domanda precedente, determinare la probabilità che al tempo $t > t_0$ una seconda misura riveli il sistema nello stato $\overline{|2n\rangle}$, dove $\overline{|n\rangle}$ sono le autofunzioni della hamiltoniana al tempo $t > t_0$ (cioè $\overline{|1\rangle}$ è lo stato fondamentale della hamiltoniana dopo lo spostamento delle pareti, $\overline{|2\rangle}$ il primo stato eccitato e così via).

(38) Considerare la hamiltoniana Eq. (26). Determinare le autofunzioni $\psi_E(p)$ nella base degli impulsi. Discutere se le autofunzioni siano normalizzazbili in senso proprio o improprio e determinare la costante di normalizzazione.

(39) Considerare un gradino di potenziale

$$V(x) = V_0\Theta(x) \tag{52}$$

e scrivere le autofunzioni nelle due regioni nella forma

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \text{ se } x < 0 \\ Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} \text{ se } x > 0 \end{cases}. \tag{53}$$

(a) Determinare le condizioni che legano i coefficienti A, B, C, D nel caso piu' generale.

(b) Determinare la matrice U che soddisfa

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k'}C \\ \sqrt{k}B \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \sqrt{k}A \\ \sqrt{k'}D \end{pmatrix} \tag{54}$$

e dimostrare che è unitaria.

(c) Dimostrare che l'unitarietà di U è condizione necessaria e sufficiente affinché la corrente di probabilità soddisfi l'equazione di continuità.

(40) Considerare la funzione d'onda Eq. (29).

(a) Dimostrare che se $k = 0$ essa è autostato dell'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda\delta(x) \tag{55}$$

per λ reale e positivo, determinare la relazione tra le costanti λ e α, e l'autovalore di energia.

(b) Determinare la probabilità che eseguendo un'opportuna misura su un sistema preparato nell'autostato dell'hamiltoniana dato nella domanda precedente esso venga rivelato nello stato dato dalla Eq. (29) con k generico. Discutere che cosa succede nel limite $\alpha \to \infty$.

(41) Considerare la hamiltoniana unidimensionale avente potenziale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa\,\delta(x), \tag{56}$$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac e κ è un coefficiente reale.

(a) Nel caso in cui $\kappa < 0$ (buca deltiforme), determinare il numero di stati, i relativi autovalori e autofunzioni, e la parità di quest'ultime.

(b) Determinare le autofunzioni nel caso di autostati di scattering (stati ad energia positiva), ed in particolare discutere la dipendenza di tali autofunzioni dal segno di κ.

(c) Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione nel caso di un'onda piana proveniente da $x = -\infty$ e determinare il valore di energia per cui la probabilità di riflessione è pari a quella di trasmissione.

(42) Considerare un sistema unidimensionale che si trova nell'uno o nell'altro dei seguenti stati:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[|0\rangle + (1+2i)|1\rangle\right]; \qquad |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[|0\rangle + (1+2i)|2\rangle\right] \tag{57}$$

dove $|0\rangle$, $|1\rangle$,..., $|n\rangle$ sono autostati dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico ($|0\rangle$ è lo stato fondamentale).

(a) Determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso nello stato $|\psi\rangle$ e nello stato $|\varphi\rangle$.

(b) Supponendo che il sistema al tempo $t = 0$ si trovi nello stato $|\varphi\rangle$ determinare lo stato in cui esso si trova al tempo t e (utilizzando la rappresentazione di Schrödinger) determinare i valori medi di x e p al tempo t.

(c) Supponendo ora che sistema si trovi invece nello stato $|\psi\rangle$, calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso in questo stato, ossia $\langle\psi|(\Delta x)^2|\psi\rangle$ e $\langle\psi|(\Delta p)^2|\psi\rangle$. Calcolarne il prodotto e commentare brevemente il risultato.

(d) Considerare l'operatore parità $\mathcal{P}$ definito nel problema (20).

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \langle -x|\psi\rangle. \tag{3}$$

Discutere se $\mathcal{P}$ e l'hamiltoniana H eq. (2) possano essere diagonalizzati simultaneamente; se gli stati $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ siano autostati di $\mathcal{P}$ e se gli stati in cui si trova al tempo t un sistema che al tempo $t = 0$ si trovava nello stato $|\psi\rangle$ o nello stato $|\varphi\rangle$ siano autostati di $\mathcal{P}$.

(e) Si supponga di eseguire al tempo $t = 0$ una misura di energia su un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$: dire quali sono i risultati della misura e le loro probabilità, determinare l'indeterminazione di posizione ed impulso subito dopo la misura e determinare il valor medio di x, p e $\mathcal{P}$ per ogni tempo $t > 0$, cioè successivo alla misura.

(43) Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana di oscillatore armonico

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{58}$$

(a) determinare la trasformazione effettuata dall'operatore parità del problema sugli operatori di creazione e distruzione $a^\dagger$ e a.

(b) Usando il risultato della domanda precedente, dimostrare che se lo stato fondamentale è un autostato della pariotà, allora tutte le autofunzioni

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle \tag{59}$$

della hamiltoniana H_0 sono autostati della parità e determinare l'autovalore associato. Spiegare la ragione di questo risultato.

(c) Dimostrare che $\mathcal{P} = \exp\left(i\pi a^\dagger a\right)$, dove $a^\dagger$ and a sono operatori di creazione e distruzione, fornisce una rappresentazione dell'operatore parità.

(d) Introdurre ora l'accoppiamento con un campo elettrico, ovvero la hamiltoniana

$$H = H_0 + eEx, \tag{60}$$

dove eE è una costante reale. Determinare lo spettro della hamiltoniana H.

(e) Discutere se le autofunzioni di H siano anche autofunzioni di H_0, e perché.

(f) Scrivere la funzione d'onda per lo stato fondamentale della hamiltoniana H Eq. (4) in termini dell'azione dell'operatore di traslazione sulla funzione d'onda per lo stato fondamentale della hamiltoniana H_0 Eq. (1).

(g) Dimostrare che lo stato fondamentale della hamiltoniana H è autostato dell'operatore di distruzione a relativo alla hamiltoniana H_0, e determinare il corrispondente autovalore.

(44) Considerare un sistema unidimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_\lambda = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\lambda\left(a + a^\dagger\right), \tag{61}$$

dove ω e λ sono costanti reali e positive e a è un operatore tale che

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1. \tag{62}$$

(a) Dimostrare che la hamiltoniana data può essere riscritta nella forma

$$H_\lambda = \hbar\omega\bar{a}^\dagger\bar{a} + K, \tag{63}$$

dove

$$\bar{a} = a + \delta \tag{64}$$

e δ e K sono numeri reali, e determinare il valore di questi numeri.

(b) Determinare il commutatore $[\bar{a}, \bar{a}^\dagger]$ e utilizzare il risultato per determinare lo spettro di autovalori della hamiltoniana H_λ Eq. (61).

(c) Supporre ora che il termine proporzionale a λ nella Eq. (61) venga acceso al tempo $t > 0$, ossia che la hamiltoniana dipenda dal tempo nel modo seguente:

$$H(t) = \begin{cases} H_0 & t \leq 0; \\ H_\lambda & t > 0. \end{cases}, \tag{65}$$

dove H_λ è la hamiltoniana Eq. (61) , e H_0 è data da

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a. \tag{66}$$

Al tempo $t = 0$ (cioè subito prima che venga acceso il termine in λ) viene eseguita una misura di energia sul sistema che dà come risultato $E = 0$. Determinare il valore medio e l'indeterminazione degli operatori x e p definiti in termini degli operatori $\bar{a}$ e $\bar{a}^\dagger$ da

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\bar{a} + \bar{a}^\dagger\right), \qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\bar{a}^\dagger - \bar{a}\right). \tag{67}$$

Discutere se il sistema si trovi in uno stato di minima indeterminazione e perché.

(d) Dimostrare che lo stato in cui si trova il sistema subito dopo la misura del punto precedente è un autostato dell'operatore $\bar{a}$ Eq. (64) e determinare il corrispondente autovalore.

(e) Scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per l'operatore $a(t)$, ed utilizzare il risultato per determinare la dipendenza dal tempo dell'operatore $\bar{a}(t)$ Eq. (64)

(f) Determinare il valor medio degli operatori x e p, Eq. (67), per ogni tempo $t > 0$.

(g) Determinare la probabilità che il sistema preparato dalla misura del punto (c) venga rivelato nell'n-esimo autostato di energia della hamiltoniana Eq. (1) al tempo $t > 0$. Il risultato dipende dal tempo?