

# Fisica Teorica I

Introduzione alla teoria quantistica dei campi

Stefano Forte

# 1 Teoria classica dei campi

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 1.1 Coordinate normali                       | 1  |
| 1.2 Passaggio al continuo e campi classici   | 5  |
| 1.3 Equazioni del moto e coordinate normali  | 9  |
| 1.4 Campi relativistici e gruppo di Poincaré | 13 |
| 1.5 Il teorema di Noether                    | 21 |

# 2 Quantizzazione dei campi: campi liberi

|                                                                                       |               |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 2.1 Quantizzazione del campo scalare                                                  | 31            |
| 2.2 Principati di 'liberi': sim.intere e spaziotemporali                              | 37            |
| 2.3 Il campo d'spin $1/2$ (di Dirac)                                                  | 42            |
| <del>2.4 Le Interazioni ed evoluzione temporale</del>                                 | <del>53</del> |
| <del>2.5 Il path-integral in meccanica quantistica ed<br/>interazioni dei campi</del> | <del>58</del> |

# 3. Campi in interazione

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| 3.1 Interazioni ed evoluzione temporale | 53 |
| 3.2 Il path integral                    | 58 |
| 3.3 Il propagatore                      | 69 |
| 3.4 Il path integral per i fermioni     | 72 |

# 4. Ampiezze di transizione

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 4.1 Il vertice di interazione | 78 |
| 4.2 La formula di riduzione   | 80 |
| 4.3 Le regole di Feynman      | 83 |

## 5. Calcolo di processi al primo ordine

5.1 Calcolo dell'ampiezza:  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  in QED

90

5.2 Cinematica e scelta del sistema di riferimento

94

5.3 La serie d'into: fattore di flusso e spazi delle fasi

97

## 6. La rinormalizzazione

6.1 Gli infiniti ed il loro significato

107

6.2 Teoria delle perturbazioni rinormalizzata

116

6.3 Rinormalizzabilità

121

# I Teoria Classica dei Campi

## 1 Coordinate normali

La teoria quantistica dei campi è la meccanica quantistica dei sistemi con numero infinito di gradi di libertà. La necessità di trattare sistemi di questo tipo si presenta come conseguenza della necessità di conciliare la meccanica quantistica con la relatività. Questo richiede che si trattino sullo stesso piano il tempo e lo spazio. Questo si può fare o riducendo lo spazio a parametro, o promuovendo il tempo ad operatore. Entrambe le strade sono possibili; noi seguiremo la prima. È ovvio che nel primo caso si ha a che fare con sistemi con infiniti gradi di libertà. Ma questo è vero anche nel secondo caso se si pensa alla formulazione alla Feynman: qualunque fetta (superficie tipo spazio) interseca la linea di universo di una particolare riga in numero infinito di volte.

La trattazione di sistemi di infiniti gradi di libertà in cui la coordinata gioca il ruolo di parametro è radicata nella meccanica classica: iniziano quindi la trattazione con una rassegna delle principali idee classiche che ne sono alla base.

Ricordiamo che il più generale sistema meccanico è l'oscillatore armonico perché qualunque potenziale è quadratico attorno ad un minimo (punto di equilibrio). L'idea fondamentale della teoria classica dei campi è di considerare un sistema continuo (es. corda vibrante) come il limite continuo di oscillatori armonici accoppiati.

Ricordiamo che si trattano questi sistemi in modo

delle coordinate normali.

Per un problema bidimensionale

$$V(x_1, x_2) = v(x_1^0, x_2^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^{(0)}) (x_j - x_j^{(0)}) + \dots$$

$$= V_0 + \frac{1}{2} V_{ij} q_i q_j \quad (1)$$

con  $q_i \equiv (x_i - x_i^{(0)}) / \sqrt{m}$

$$V_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{m}$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (2)$$

Notare

La lagrangiana e la hamiltoniana sono

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} q_i q_j V_{ij} \quad (3)$$

$$H = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} q_i q_j V_{ij} = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} q_i q_j V_{ij}$$

Notare che abbiamo assorbito la massa in una ridefinizione dei campi.

Possiamo scrivere in modo compatto la lagrangiana in notazione di Dirac come

$$L = \frac{1}{2} \langle \dot{q} | \dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q | V | q \rangle \quad (4)$$

con eq. del moto  $\frac{d^2}{dt^2} |q\rangle + V |q\rangle = 0$

(4')

dove

$$\langle e_i | q \rangle = q_i$$

che si risolvono passando dalla base  $|e_i\rangle$  a quella degli autovettori

$$V |v_i\rangle = \lambda_i |v_i\rangle$$

(5)

in cui

$$V = \frac{1}{2} \langle q | V | q \rangle = \frac{1}{2} \langle q | v_i \rangle \langle v_i | V | v_j \rangle \langle v_j | q \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i (\langle q | v_i \rangle)^2$$

(6)

Ne segue che

$$L = \frac{1}{2} \langle \dot{q} | \dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q | V | q \rangle =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \langle V_i | q \rangle \right)^2 - \frac{1}{2} \lambda_i (\langle V_i | q \rangle)^2. \quad (7)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che poiché la matrice  $V_{ij}$  è reale e simmetrica: noi autovettori hanno componenti reali e quindi  $\langle V_i | q \rangle = \langle q | V_i \rangle = (\langle V_i | q \rangle)^*$ .

Notare che  $\langle V_i | q \rangle$  sono le componenti del vettore astratto  $|q\rangle$  nella base degli autovettori di  $V$ .

La configurazione è di equilibrio stabile se  $\lambda_i > 0 \quad \forall i$ .

Passiamo ora a definire coordinate normali

$$c_i = \langle q | V_i \rangle \quad (8)$$

le componenti di  $|q\rangle$  nella base degli autovettori di  $V$ .

In termini di coord. normali la lagrangiana si disaccoppia

$$L = \sum_i \frac{1}{2} (\dot{c}_i^2 - \lambda_i c_i^2) \quad (9)$$

che è la somma di lagr. di oscillatore armonico, con eq. di moto

$$\ddot{c}_i = -\lambda_i c_i \Leftrightarrow \ddot{c}_i + \omega_i^2 c_i = 0 \quad (10)$$

soluzione generale

$$\begin{aligned} c_i &= c_i^+ e^{i\omega_i t} + c_i^- e^{-i\omega_i t} \\ &= A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t \\ &= N_i \sin(\omega_i t + \delta_i) \quad \omega_i = \sqrt{\lambda_i} \end{aligned} \quad (11)$$

Possiamo tornare alle coordinate  $q_i = \langle e_i | q \rangle$  di partenza eseguendo il cambiamento di base

$$q_i = \langle e_i | V_j \rangle \langle V_j | q \rangle \quad (12) \quad \sqrt{3}$$

Troviamo immediatamente

$$q_i(t) = \langle e_i | q_i \rangle = \langle e_i | U \rangle \langle U | q_i \rangle \\ = \delta_{ij} C_j(t) \quad (13)$$

dove  $C_j(t)$  sono date dalle Eq. (11) e

$$O_{ij} = \langle e_i | U_j \rangle \quad (14)$$

è la matrice di passaggio dalla base degli autovettori del potenziale (coordinate normali) alla base di partenza.

Il vantaggio della notazione di Dirac è che mostra come la stessa trattazione valga nel caso di  $N$  oscillatori accoppiati. La trattazione può anche essere estesa al caso di  $T$  non diagonale, diagonalizzando simultaneamente  $T$  e  $V$ , cosa sempre possibile, anche se  $T$  e  $V$  non commutano, nel qual caso la trasf. non è ortogonale.

Questo vuol dire che il moto di un sistema di  $N$  corpi vicino all'equilibrio può sempre essere descritto come un sistema di oscillatori armonici accoppiati.

## 2. Il campo classico

(a) 2.1 costruzione della lagrangiana  
 consideriamo un insieme di oscillatori accoppiati,  
 con lagrangiana

$$L = T - V \quad (1)$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 \quad (2)$$

$$V = \sum_i \frac{1}{2} \bar{k} [(x_i - x_i^{(0)}) - (x_{i+1} - x_{i+1}^{(0)})]^2 \quad (3)$$

Definiamo la coordinata lagrangiana

$$q_i = \sqrt{m} (x_i - x_i^{(0)}) \quad (4)$$

sicché

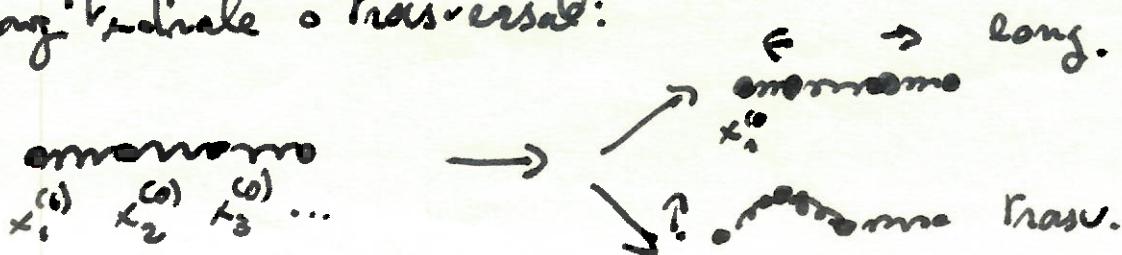
$$T = \sum_i \frac{1}{2} \dot{q}_i^2 \quad (5)$$

$$V = \sum_i \frac{1}{2} \frac{\bar{k}}{m} (q_i - q_{i+1})^2 = \frac{1}{2} k \sum_i (q_i - q_{i+1})^2 \quad (6)$$

dove si è posto

$$k = \frac{\bar{k}}{m} \quad (7)$$

Nota che  $(x_i - x_i^{(0)})$  potrebbe essere una deviazione  
 longitudinale o trasversale:



## Modulo di Young

Definition:  $F = \frac{q_i - q_i^0}{d} \gamma$

→  $F$  = force necessaria per allungare  $q$  di  $d$

Ma  $F = \frac{\partial U}{\partial q} = k(q_i - q_i^0)$  dunque  $k = \frac{\gamma}{d}$



da cui la densità di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \lambda \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (20)$$

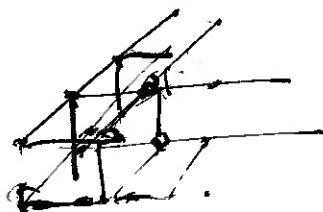
e la azione

$$I = \int dt L = \int dx dt \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \lambda \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (21)$$

Notiamo che la azione è adimensionale, come deve essere.

## 2.2 Campi relativistici

Notiamo immediatamente che la procedura seguita fin qui può essere generalizzata direttamente al caso di  $(d-1)$  dimensioni spaziali, partendo da interazioni più vicini su un reticolo cubico



In tal caso si trova, ovviamente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \lambda \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi \right] \quad (22)$$

Notiamo inoltre che possiamo generalizzare la dinamica includendo in linea di forza di richiamo che dipende dallo spostamento assoluto, come è relativo, ossia

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \mu^2 x_i^2 = \frac{1}{2} m^2 \sum_i q_i^2 \quad (23)$$

dove  $m = \frac{f}{a}$  e abbiamo chiamato  $m$  la massa della Eq. (4) da nel limite continuo diventa

$$V = \frac{1}{2} \int dx m^2 \varphi^2 \quad (24)$$

Notiamo che  $[m^2] = \left[ \frac{\mu^2}{m_0} \right] \text{ ma } [\mu^2] \text{ è una costante universale } \propto \sqrt{8}$

Questo corrisponde all'esempio di una corda vibrante  
~~in~~ immersa in un mezzo elastico che fornisce una  
 forza di richiamo proporzionale alla elongazione.  
 Siamo quindi arrivati alla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \lambda (\bar{\partial} \varphi \bar{\partial} \varphi) - m^2 \varphi^2 \right] \quad (25)$$

Questa lagrangiana ha manifestazioni in "invarianza relativistica"  
 interpretando

$$\lambda = c^2 \quad (26)$$

Notare che questo vuol dire che la QFT è necessariamente  
 "relativistica", anche se, ovviamente, in un mezzo generico  
 $c$  non è la velocità della luce, nel senso  
 che le derivate spaziali e temporali capiscono in modo  
 simmetrico. Naturalmente è possibile considerare il limite  
 nonrelativistico delle eq. del moto, il che corrisponde ad  
 una lagrangiana del primo ordine nel tempo.

La lagrangiana Eq. (25) è quella del corpo scalare di  
 Klein-Gordon: un unico grado di libertà in ogni  
 punto dello spaziotempo. In forma manifestamente  
 covariante si scrive così

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right) \quad (27)$$

da cui

$$S = \int d^4x \quad \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right) \quad (28) \quad (9)$$

## 2.3 Equazioni del moto

Le eq. del moto si possono ricavare dalla Lagrangiana Eq. (27) usando in principio variazionale.

Ricordiamo l'angolo per la meccanica del punto:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}; t) \quad (28)$$

$$0 = \delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \quad (29)$$

usando il fatto che  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$  e che  $q(t_1) = q_1, q(t_0) = q_0$  sono fissi.

Ne seguono le eq. di Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (30)$$

Nel caso della teoria dei campi abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi \quad (31) \end{aligned}$$

Notiamo che le condizioni al contorno che hanno si da  
 si passa integrare per parti possono essere pensate  
 assegnando  $\varphi(t_0, \bar{x}) = \varphi_0(t_0, x)$ ;  $\varphi(t_1, \bar{x}) = \varphi_1(t_1, \bar{x})$   
 ed inoltre supponendo che i campi all'infinito spaziale  
 decrescano abbastanza rapidamente da tutti i termini di  
 superficie si annullino, e, equivalentemente, definendo  
 i campi su  $S^3$ , ottenuta da  $\mathbb{R}^3$  per proiezione  
 stereografica.

Notiamo anche che l'aggiunta di una derivata totale  
 $\partial_\mu \chi^\mu$  alla lagrangiana non cambia l'azione e  
 quindi lascia invariate le eq. del moto.

Notiamo infine che si può definire un formalismo  
 hamiltoniano, introducendo un campo canonico  $\pi$   
 coniugato a  $\varphi$  come

$$\pi(\bar{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \quad (32)$$

ed una derivata di hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \quad (33)$$

da cui, se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V[\varphi] \quad (34)$$

$$\pi = \dot{\varphi} \quad (35)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V[\varphi] \quad (36)$$

Per il caso di Klein Gordon abbiamo immediatamente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \gamma_\mu \varphi \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \quad (38)$$

sicché le eq. del moto sono

$$\gamma_\mu \gamma_\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad (39)$$

ovvero

$$(\square + m^2) \varphi = 0 \quad (40)$$

ossia

$$\ddot{\varphi} = (\Delta - m^2) \varphi \quad (40')$$

Possiamo "leggere" queste eq. del moto scrivendo la Lagrangiana in termini di un vettore  $\varphi_{\bar{x}}(t)$  dove  $\bar{x}$  è un indice di componente:

$$L = \frac{1}{2} \left[ \langle \dot{\varphi} | \dot{\varphi} \rangle - \langle \varphi | V | \varphi \rangle \right] \quad (41)$$

$\langle \bar{x} | \varphi(t) \rangle = \varphi(\bar{x}, t)$

Notiamo che questa è la Lagrangiana (non la densità) in quanto è integrata in  $dx$  ("somma sulle componenti").  
Notiamo anche che

$$\langle \psi | W | \psi \rangle = \int d^3x \left( \bar{\psi} \psi (\Delta + m^2) \psi \right) \\ = - \int d^3x \psi (\Delta - m^2) \psi \quad (42)$$

dimostrando che  $W$  è l'operatore

$$\langle \bar{\psi} | W | \bar{\psi}' \rangle = (-\Delta + m^2) \delta^{(3)}(\bar{\psi} - \bar{\psi}') \quad (43)$$

ossia  $W = (\hat{p}^2 + m^2)$  (44)

con  $\hat{p} = -i \bar{\nabla}$  (45)

(notiamo che qui tutto è sempre classico!!)

Da questo punto di vista le eq. del moto (39) hanno la forma

$$\frac{d}{dt} |\psi\rangle = -W |\psi\rangle \quad \text{ossia} \quad \frac{d}{dt} |\psi\rangle = -W |\psi\rangle \quad (46)$$

Notare che  $-W |\psi\rangle$  è la "derivata del potenziale rispetto alla coordinata lagrangiana", quindi la eq. (46) può essere letta come  $\frac{d}{dt} \bar{\pi} = \bar{\pi}$  (47)

Questo punto di vista è essenziale per capire la quantizzazione.

## 2.4 Soluzioni delle eq. del moto e coordinate normali

Per risolvere le eq. del moto, diagonalizziamo il potenziale  $V$ , che passando al caso continuo ( $V \rightarrow W$ ) è stato promosso a operatore differenziale:  $W = \vec{p}^2 + m^2$  (Eq. (44)).  
Ovviamente gli autovalori di  $W$  sono gli stessi degli autovalori di  $\vec{p}$  ossia le onde piane  $\vec{p} | \vec{k} \rangle = \vec{k} | \vec{k} \rangle$  (48)

con  $\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle = \exp i \vec{k} \cdot \vec{x}$  (49)

Notare che abbiamo normalizzato gli stati come

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (50)$$

il che implica anche che

$$1 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| \quad (50')$$

Le coordinate normali sono le componenti di  $|\psi\rangle$  nella base delle  $|\vec{k}\rangle$ , ossia

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} | \psi \rangle &= \psi(\vec{k}) = \int d^3 x e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{x}) \quad (50'') \\ &= \int \langle \vec{k} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi \rangle d^3 x \end{aligned}$$

(notare l'abuso di notazione, per cui diciamo  $\langle \vec{k} | \psi \rangle = \psi(\vec{k})$  mentre ovviamente  $\psi(\vec{k})$  e  $\psi(\vec{x})$  sono diverse funzioni del proprio argomento).

Notare che con la nostra scelta di normalizzazione

$$\langle \vec{x} | \psi \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{k}) \quad (50''')$$

Notiamo anche che il campo  $\psi(\vec{x})$  è reale:

-  $c$  una costante. Questo impone una condizione sulle  $q(k)$ : infatti

- (51) Finora si è fatto  
1 - n d  
2) Finora 1 Dof per  
punto spaziotempo  
→ save hult.  
generale

$$= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}} q(\vec{k}) \quad (51)$$

da cui segue

$$q(\vec{k}) = q^*(-\vec{k}) \quad (52)$$

Le eq. del moto per le coordinate normali sono ora disaccoppiate  $\langle k | \frac{d^2}{dt^2} | \varphi \rangle = - \langle k | \omega | \varphi \rangle$  ossia esplicitamente

$$\frac{d^2}{dt^2} q(\vec{k}) = - [\vec{k}^2 + m^2] q(\vec{k}) \quad (53)$$

$$= - \omega_{\vec{k}}^2 q(\vec{k}) \text{ con } \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

con soluzioni

$$q(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( a(\vec{k}) e^{-i\omega t} + b(\vec{k}) e^{i\omega t} \right) \quad (54)$$

Notiamo che la condizione di realt  eq. (52) implica dove  $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$

$$q^*(-\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( a^*(-\vec{k}) e^{i\omega t} + b^*(-\vec{k}) e^{-i\omega t} \right) \quad (55)$$

ossia  $a(\vec{k}) = b^*(-\vec{k}) \quad (56)$

  il hult  $\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$    convenzionale per la tua condizione.  
(pensare alle a, n della sec. an) 15

Tornando alla base di partenza abbiamo infine

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \langle \vec{x} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \phi \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{d^3 k}{(2\pi)^3}} \frac{e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2\omega}} \left( e^{-i\omega t} a(\vec{k}) + e^{i\omega t} a^\dagger(-\vec{k}) \right) \\ &= \sqrt{\frac{d^3 k}{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} a(\vec{k}) + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} a^\dagger(\vec{k}) \end{aligned} \quad (57)$$

che è manifestamente reale.

Notare che possiamo passare alle onde piane 4-dimensionali

$$f(\vec{k}) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (58)$$

come soluzioni elementari delle eq. d'onda del moto

Eq. (46). Vediamo così che le coordinate nonali sono essenzialmente le soluzioni elementari delle eq. d'onda del moto, in quanto queste ultime manifestamente disaccoppiano l'evoluzione temporale.

Notiamo infine che se ripristiniamo il fattore  $\lambda = c^2$  eq. 26 nella lagrangiana, l'eq. del moto diventa

$$\square \phi = (c^2 \Delta - m^2) \phi \quad (59)$$

e dunque la soluzione generale elementare è la stessa,

ma ora con  $\omega^2 = c^2 k^2 + m^2$

quindi  $c$  è proprio la velocità di fase dell'onda relativistica quando  $m=0$  ("velocità della luce") (la vel. di gruppo è più piccola di  $c$  se  $m > 0$ ):  $v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}}$

#### 4. Campi relativistici e gruppo di Poincaré

È un fatto sperimentale che le teorie fisiche sono invarianti sotto il gruppo di Poincaré: questo implica che la azione deve essere una scalare di Poincaré-Lorentz (passivamente) e quindi anche la lagrangiana densità di Lagrange è vero di una derivata totale.

Ricordiamo ora alcune proprietà dei gruppi di Lorentz e Poincaré; poi ne studiamo le implicazioni per la teoria dei campi (classica e quantistica).

Il gruppo di Lorentz è il gruppo di trasformazioni  $(\mathcal{O}(3,1))$

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1)$$

che lasciano invariato

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = t^2 - |\vec{x}|^2 \quad (2)$$

ossia tali che

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (3)$$

Il gruppo di Poincaré si ottiene aggiungendo a queste anche le traslazioni

$$x'^\mu \rightarrow x'^\mu + \delta x^\mu \quad (4)$$

Il gruppo di Lorentz è generato da sei generatori

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu} \quad (5)$$

$$\Lambda = \exp -\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \quad (6)$$

Le cui regole di commutazione sono date da

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = -i(g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} +$$

$$+ g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho}) \quad (7)$$

ossia prendo

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i = J^{i0} = J^{0i} \quad \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & 0 & J^3 & -J_2 \\ k_2 & -J^3 & 0 & J_1 \\ k_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$[J^i, J^j] = i \varepsilon^{ijk} J^k$$

$$[J^i, K^j] = i \varepsilon^{ijk} K^k$$

$$[K^i, K^j] = -i \varepsilon^{ijk} J^k \rightarrow SO(3) \times SO(3)$$

$$\text{prendo } J_{\pm}^i = (J^i \pm i K^i) \quad (8')$$

ci ne aggiungono le traslazioni

$$T^{\mu\nu} = \exp(-i P^\mu \delta_\mu)$$

$$[J_{\pm}^i, J_{\pm}^j] = i \varepsilon^{ijk} J_{\pm}^k \quad (8'')$$

$$[J_{\pm}^i, J_{\mp}^j] = 0 \quad (9)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (10)$$

$$[J^i, P^j] = i \varepsilon^{ijk} P^k \quad [K^i, P^j] = i \delta^{ij} P^0$$

$$[J^i, P^0] = 0 \quad [K^i, P^0] = i P^i$$

$$\rightarrow [P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho) \quad (11)$$

$$\text{Nella rapp. fondamentale } (J^{\mu\nu})_{\rho\sigma} = i(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma}) \quad (11')$$

Notiamo che l'algebra del gruppo di Lorentz può essere scritta come quella di  $SO(3) \times SO(3)$  che è la stessa di  $SU(2) \times SU(2)$  che ne è il ricoprimento universale. Il ricoprimento universale di  $SO(3,1)$  è  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Le rappresentazioni del gruppo di Lorentz si possono costruire in analogia a quelle del gruppo delle rotazioni, comprendendo rappresentazioni vettoriali per ottenere rapp. tensoriali e rappresentazioni

Spinoriale per ottenere rappresentazioni di spin semi-intera.  
 Per stabilire il contatto coi risultati noti ricordiamo alcuni risultati derivati sul contenuto di rappresentazioni delle rotazioni di una rapp. di Lorentz.

Un vettore di Lorentz  $p^\mu = (E, \vec{p})$  è  $\mathbb{O} \oplus \mathbb{1}$  di  $SO(3)$  (scalare + vettore).

Un tensore a due indici di Lorentz:

- dal punto di vista di Lorentz si decompone in rapp. irriducibili:  
 traccia; parte antisimmetrica; parte simmetrica.

- dal punto di vista delle rotazioni si decompone come

$$T^{\mu\nu} \quad \mu, \nu = 0, i \quad v = 0, i \quad = T^{00} \quad T^{0i} \quad T^{ij} \\
(\mathbb{O} \oplus \mathbb{1}) \otimes (\mathbb{O} \oplus \mathbb{1}) = (\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \oplus \mathbb{1}) \oplus (\mathbb{1} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}) \\
\oplus (\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}) \quad (12) \\
T^{ij}$$

Il tensore spinoriale  $T^{ij}$  corrisponde alla composizione di due spin 1, ed ha quindi componenti di spin 0<sub>x</sub> (traccia) 1 /  $\epsilon^{ijk} T^{jk} \rightarrow$  parte antisimmetrica  $\rightarrow$  3 comp

parte simmetrica  $\rightarrow$  5 comp - 1 traccia  $\rightarrow$  5 comp

Dal punto di vista delle inep di Lorentz, chiamando la traccia  $\epsilon^{0i} T^{0i}$  (primo 0) e scalare di Lorentz e quindi utile per rotazioni; la parte antisim.  $\epsilon^{ijk} T^{jk}$  (6 comp.) ordine due vettori  $F^{0i} = F^{i0}$  e  $\epsilon^{ijk} F^{jk}$ ; la parte sim.

contiene uno scalare  $(S^{00})$ , un vettore  $(\frac{S^{0i} + S^{i0}}{2})$  e

una spin 2  $(S^{ij} + S^{ji})$ :  $3 + 5 + 1 = 9$  componenti. Più in generale, possiamo costruire le rapp. di Lorentz a partire da rapp. di SU(2) che lo compagano, utilizzando l'E<sub>6</sub>  $(8^i - 8^j)$ .

ovviamente la dimensione della rappresentazione  $(j_1, j_2)$  è  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .

Abbiamo:  $(0, 0)$  scalare

$$\begin{array}{l|l} (1/2, 0) & \text{Spinori } \mu_L \\ (0, 1/2) & \text{(di Weyl) } \mu_R \end{array} \quad J_i^\pm = \frac{\sigma_i}{2} \Rightarrow \begin{cases} J_i^\pm = \frac{\sigma_i}{2} \\ K_i^\pm = i \frac{\sigma_i}{2} \end{cases} \quad (14)$$

$(1/2, 1/2)$  rapp. quadielminale (complessa)

che può essere posta in corrispondenza 1-1 con la rapp. vettoriale notando che

$$\mu_L^\dagger \bar{\sigma} \mu_L = \vec{v} \quad \text{vettore } \vec{v} \quad (15)$$

Lemma di Schur:  
 trasf. che commuta con tutto è multiplo  
 dell'identità  $(J^2 = 2(2+1)\mathbb{1})$  ineq fissate  
 o è diversa  $\rightarrow$  ineq. diverse  
 off di op. di Carini  $\rightarrow$  rango dell'algebra  
 (# di op. sim. diagonali sotto)

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \quad e^-$$

no su questa

o la quantizzare  
 (Dirac)

In  $\dots$  sono introdotti  
 a con  $\dots$  nella set. precedente:  
 quantità  $\dots$  etichettate da posizione e tempo -

$\dots$  ci interessa quindi costruire rappresentazioni del gruppo  
 di Lorentz sullo spazio dei campi (da promuovere poi a rapp. del  
 gruppo di Poincaré). In vista della quantizzazione, ci interessa  
 poi costruire rapp. del gruppo di Lorentz (e poi Poincaré) su uno  
 spazio di Hilbert di stati fisici.

Un campo è una funzione delle coordinate  $\phi(x)$   
 che sotto trasf. di Lorentz

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (16)$$

si trasforma secondo una legge che lega  $\Phi'(x')$  a  $\Phi(x)$   
 in modo che  ~~$\Phi'(x') = T(\Lambda) \Phi(x)$~~   $\Phi'(x') = T(\Lambda) \Phi(x)$  (17)

dove  $T(\Lambda)$  è una rappresentazione del gruppo di Lorentz  
 sullo spazio dei campi (per essere precisi, lo spazio "target").

Casi notevoli: scalari :  $\Phi'(x') = \Phi(x)$  (18)

vettoriale :  $V^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x)$  (19)

Il caso di spin 1/2 verrà studiato in seguito, in quanto risulta  
 più utile costruire dapprima il campo fermionico a partire dalla  
 costruzione della lagrangiana.

Dal punto di vista di Poincaré, richiediamo che tutti i campi  
siano scalari, ossia anche un campo vettoriale è tale che

$$V'^\mu(x^\mu + \delta^\mu) = V^\mu(x^\mu) . \quad (20)$$

Questo è ovvio quando si ricorda che il campo deriva da derivare  
 da una configurazione di equilibrio: si ricorda cioè che ~~il campo~~  
 il campo è stato costruito per ~~cond~~ limite continuo di

$$q_i \rightarrow \phi(x_i) \quad (21)$$

con  $q_i = \bar{q}_i - q_i^{(0)}$

che è manifestamente invariante per traslazioni.

Facciamo infine una osservazione da sarà imputate nel seguito:

se  $\Phi'(x') = \Phi(x)$ , allora  $\Phi'(x) \neq \Phi(x)$ , ed in particolare

$$\begin{aligned} \Phi'(x') &= \Phi'(x^\mu + \delta x^\mu) = \Phi'(x') - \partial_\mu \Phi' \delta x^\mu \\ &= \Phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \Phi(x) + O(\delta^2) . \end{aligned} \quad (22)$$

Consideriamo la rappresentazione di trasformazioni  
del gruppo di Poincaré su uno spazio di Hilbert,  
ossia uno spazio di raggi (classe di equivalenza  
di stati che differiscono per una fase).

Consideriamo sinché, ossia trasformazioni

$|u\rangle \rightarrow |u'\rangle$  tali che le trasformazioni preservino  
la proprietà di transitività, ossia se  $|u\rangle \rightarrow |u'\rangle$  e  
 $|u'\rangle \rightarrow |u''\rangle$  allora

$$\langle u | u \rangle = \langle u' | u' \rangle \quad (23)$$

Ma l'assunzione di Wigner dice che condizione sufficiente  
(ovvio) e necessaria (non ovvio) affinché ciò sia  
vero è che la trasformazione sia lineare e  
unitaria (o antilineare e antunitaria) ossia

$$|u'\rangle = U|u\rangle \quad (23')$$

con

$$U^\dagger U = \mathbb{1}$$

$$U(\alpha |u\rangle + \beta |v\rangle) = \alpha U|u\rangle + \beta U|v\rangle \quad (24)$$

Vediamo infine l'azione di trasformazioni di Lorentz & Poincaré su uno spazio di stati fisici quantistici, cioè su uno spazio di ket  $(\psi)$  elementi di uno spazio di Hilbert.

Una teoria di Wigner afferma che l'azione di qualunque gruppo di trasformazioni su uno spazio di raggi è realizzata da operatori lineari unitari, tali cioè che <sup>(cioè tale che si conservi la norma)</sup>  $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$  <sup>(tale da preservare il prodotto scalare e unitaria in inversa)</sup> (23)

e  $U(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha U|\psi\rangle + \beta U|\phi\rangle$ . (24)

(o antilineari e antunitari: questo caso corrisponde all'invarianza temporale che non disattende) - è ovvio che l'unitarietà è sufficiente per la conservazione della norma (probabilità), non ovvio che sia necessaria. Ci interessa ora la realizzazione di  $U(1)$  su stati a un corpo

(una particella), in quanto stati a molti corpi saranno costruiti come prodotti diretti. <sup>(Definiamo)</sup> Chiamiamo stato ad una particella uno stato che porta una rapp. irriducibile del gruppo di Poincaré.

Un semplice modo di farlo è sfruttare il lemma di Schur che dice che, per una rappresentazione irriducibile, una trasformazione che commuta con tutti gli elementi del gruppo deve essere un multiplo dell'identità. Possiamo quindi costruire le rapp. irriducibili classificando gli operatori di Casimir, e distinguendo le rapp. irriducibili dai loro autovalori. Si può dimostrare infatti che il numero di operatori di Casimir è pari al rango dell'algebra, cioè al numero di generatori contanti (no per  $SU(2)$ , due per  $SO(4)$  o  $SU(3)$  ecc).

Il gruppo di Poincaré ha due operatori di Casimir:  $P^\mu P_\mu$  e  $W^\mu W_\mu$ , dove  $W_\mu$  è il vettore di Pauli-Lubanski

$W^\mu = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_\nu P_\sigma$  (25) 18

Questo ultimo è una generalizzazione covariante dello spin, infatti nell'SR di riposo

$$P^\mu = (m, 0, 0, 0); \quad W^\mu = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu j k 0} J_{jk} m = \quad (26)$$

$$W^\mu = \begin{cases} 0 \\ i \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} m J_{jk} = J^i m \end{cases}$$

che  $P^2$  commuta con  $P^\mu$  e con le rotazioni è ovvio  
che  $W^2$  commuta con rotazioni/boost è ovvio, <sup>(è scalare!)</sup> che commuta con  $P_\mu$   
è facile <sup>da</sup> vedere notando che il commutatore di  $W^\mu$  è proporzionale  
a  $P_\mu$ , e usando l'antisimmetria del tensore  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ .

Vediamo dunque che ci sono due tipi di stati (rappresentazioni)

Rappresentazioni con massa:  $P^2 |ms\rangle = m^2 |ms\rangle$   
 $W^2 |ms\rangle = m^2 s(s+1) |ms\rangle \quad (27)$

(avendo calcolato l'autovalore di  $W^2$  nell'SR di riposo).

Ogni stato porta  $2s+1$  gradi di libertà, corrispondenti alla dimensione della rapp. di  $S_z$ . Notiamo che stiamo di fatto determinando la rapp. nel modo seguente: prima scegliamo un particolare SR, in cui  $P_\mu = (m, \vec{0})$ , poi studiamo le rapp. del sottogruppo che lascia questa scelta invariante (piccolo gruppo). Poi riportiamo lo stato al suo stato qualunque ~~non~~ eseguendo all'inverso la trasf. che ci ha portato nell'SR di riferimento. Questo è noto come metodo della rapp. inalterata

Rappresentazioni a massa nulla:  $P^2 |ms\rangle = 0$   
 $W^2 |ms\rangle = 0 \quad (27)$

Notiamo che per costruzione  $W^\mu P_\mu = 0$ .

Ma se sia  $W^\mu$  che  $P^\mu$  sono tipo luce, ne segue che  $W^\mu = \pm P^\mu$ . Infatti supponiamo senza ledere la generalità che  $\vec{P}$  sia lungo l'asse  $z$ :

$$P^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (27)$$

Visto che

$$W^\mu = (\pm |\vec{h}|, \vec{h}) \quad (28)$$

$$\text{e} \quad P^\mu W_\mu = \pm |\vec{h}| \omega = h_2 \omega = 0 \quad (29)$$

ne segue che

$$W^\mu = \pm (|\vec{h}|, 0, 0, |\vec{h}|) = (h, 0, 0, h) \quad (30)$$

Notiamo inoltre che

$$h = W^0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} P_i J_{jk} = \vec{P} \cdot \vec{S} \quad (31)$$

Quindi il vettore di Pauli-Lubanski in questo caso è ~~rotazionale~~ diretto lungo l'impulso ed ha due componenti non-nulle ed eguali fra loro, poi all'elicità.

Ne segue che nel caso a massa nulla (a) lo spin deve essere lungo la direzione del moto (b) il valore dello spin lungo la direzione del moto è fissato in modulo, quindi solo due valori dello spin sono ammessi. Notare che questo è vero sia classicamente che quantisticamente.

Dal punto di vista delle rappresentazioni indotte, questo si può capire osservando che il piccolo gruppo di  $(\omega, 0, 0, \omega)$  è il gruppo delle rotazioni attorno all'asse  $z$ . Le rappresentazioni sono pertanto classificate dall'autovalue di  $S_z$ . Poiché il gruppo è abeliano, a priori tutti i valori di  $S_z$  sono

ammissibili. Tuttavia, poiché il gruppo di Poincaré è  
doppieamente connesso, solo i valori semi-interi danno  
luogo a rappresentazioni ammissibili del gruppo di Poincaré.  
Notiamo infine che a priori i due stati di  $h = \pm \frac{1}{2}$  corrispon-  
dono a due diverse particelle.  
Poiché l'inversione temporale trasforma l'una nell'altra,  
per interazioni invarianti sotto  $T$  conviene considerare  
queste due particelle come due stati della stessa  
particella, che è così l'antiparticella di se stessa.

## 5. Il teorema di Noether

Abbiamo visto che in teoria dei campi la coordinata  $x$  non è più un'osservabile canonica, bensì un indice (un parametro). Questo solleva la domanda di come costruire le osservabili. La risposta è fornita dal teorema di Noether.

Ricordiamo le dimostrazioni del teor. di Noether in meccanica classica. Sappiamo che se la lagrangiana  $L$  varia per una derivata totale, ossia

$$dA = L(q'(t')) dt' = L(q(t)) + \frac{d}{dt} f(q, t) dt \quad (1)$$

allora le eq. del moto sono invariate.

Il teor. di Noether afferma che per ogni trasf. di questo tipo vi è una quantità conservata.

Nel caso più generale, la trasf. è, nel caso infinitesimo

$$q'(t) = q(t) + \delta q(t) \quad (2)$$

$$t'(t) = t + \delta t(t) \quad (3)$$

$$\delta dA = \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{dL}{dt} \delta t \right) dt + L \delta dt \quad (4)$$

$$\text{Ma} \quad \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} (q'(t) - q(t)) = \frac{d}{dt} \delta q \quad (5)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d(t + \delta t)}{dt} = 1 + \frac{d\delta t}{dt} \quad (6)$$

$$\delta dt = dt' - dt = \left( \frac{dt'}{dt} - 1 \right) dt = \frac{d\delta t}{dt} dt \quad (7)$$

Si ha quindi

$$\delta A = \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{dL}{dt} \delta t \right) dt + \frac{d}{dt} \delta t L dt \quad (8)$$

Ma usando le eq. del moto

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

da cui

$$\delta A = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + L \delta t \right) dt \quad (9)$$

Però se  $\delta A = 0$ , si conserva la carica

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + L \delta t \quad (10)$$

Se, più in generale

$$\delta A = \frac{d}{dt} \delta t$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} L \delta t - \frac{d}{dt} \delta t \quad (11)$$

Le cariche conservate sono i generatori della simmetria sotto Poisson, o sugli stati fisici dopo la quantizzazione.  
 Un esempio particolarmente semplice è l'invarianza per traslazioni temporali. Se

$$\begin{aligned} t' &\rightarrow t + \epsilon \\ \delta t' &= \epsilon \end{aligned} \quad (12)$$

Sotto questa trasformazione  $q \rightarrow q'$  tale che

$$q'(t) = q(t) \quad (13)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} q'(t) &= q'(t' - \epsilon) = q'(t) - \epsilon \dot{q} \\ &= q(t) - \epsilon \dot{q} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\delta q = q'(t) - q(t) = -\epsilon \dot{q}$$

$$Q = -\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + L = -H \quad (15)$$

La quantità conservata quando vi è invarianza per traslazioni temporali <sup>(meno)</sup> è la hamiltoniana.

Generalizzando ora alla teoria dei campi abbiamo che la condizione di invarianza è

$$\delta A = \int \mathcal{L}(\varphi(x')) dx' = \int \mathcal{L}(\varphi(x)) dx + \int \partial_\mu f_\mu \quad (16)$$

dove  $dx$  è un integrale  $d$ -dimensionale (tipicamente 4-dim; 2 dim negli esempi discussi prima).

La variazione è ora data da

$$\begin{aligned} \delta A = & \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \partial_\mu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right) dx + \\ & + \int \delta dx \end{aligned} \quad (17)$$

Abbiamo ora

$$\delta \partial_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi' - \varphi = \partial_\mu \delta \varphi \quad \left| \begin{array}{l} \det \frac{\partial x'}{\partial x} \\ (18) \end{array} \right.$$

$$dx' = dx \frac{\partial x'}{\partial x} = dx \det(\delta_{\alpha\beta} + \partial_\beta \delta x^\alpha) = dx \partial_\alpha \delta x^\alpha + 1$$

Notare che  $\det \frac{\partial x'}{\partial x} = 1$   
(l'algebra è unitaria)

$\partial_\mu \varphi \approx$  Jacobiano

$$\det(\partial_\beta x^\alpha + \delta x^\alpha) \quad (23)$$

Usando ancora le eq. del moto

$$\delta A = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] dx \quad (19)$$

Quindi la condizione di invarianza ci porta a

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

con

$$j^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi + \mathcal{L} \delta x^\mu - p_\mu \right) \quad (20)$$

nel caso generalizzato di invarianza a nodi in terine di superficie.

Notiamo che la conservazione della corrente  $j^\mu$  implica la conservazione di una carica

$$Q = \int d^3x j^0(\vec{x}; t) \quad (21)$$

che soddisfa

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{d}{dt} j^0 = \int d^3x \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (22)$$

per corpi che vanno a zero all'infinito.

Nel caso di simetrie che lasciano invariate le coordinate le correnti  $j^\mu$  corrispondono alle correnti conservate, come ad es la corrente elettrica.

Considerando per semplicità dapprima trasformazioni  
che lascino invariate le coordinate (simmetrie interne), se  
vi è invarianza sotto un gruppo continuo di trasformazioni

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\theta_i G^i} \varphi \quad (23)$$

dove  $\varphi$  è un vettore di campi ~~dei~~ sicché la  
trasf. infinitesimale è

$$\varphi'_a = \left( \delta_{ab} + i \epsilon_i G^i_{ab} \right) \varphi_b \quad (24)$$

$$\delta \varphi^a = \varphi'^a - \varphi^a = i \epsilon_i G^i{}^a{}_\varphi$$

Quindi vi è un multiplo di corrente conservate.

$$j^{\mu}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\varphi}_a} G^i_{ab} \varphi_b \quad (25)$$

Le cariche conservate sono

$$Q^i = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} G^i \varphi = \int d^3x \pi G^i \varphi \quad (26)$$

L'algebra delle cariche sotto Poisson è quella dei generatori  
del gruppo. Infatti, definendo la derivata funzionale

$$\frac{\delta F}{\delta f(\bar{x})} = g(\bar{x}) \quad (27)$$

se

$$F = \int d^3x f(\bar{x}) g(\bar{x})$$

per cui

$$\frac{\delta f(\bar{x})}{\delta f(\bar{y})} = \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$$

e la parentesi di Poisson funzionale

$$\{Q^i, Q^j\} = \int d^3x d^3y \left( \frac{\delta Q^i}{\delta \varphi_a(\bar{x})} \frac{\delta Q^j}{\delta \pi_b(\bar{y})} - i \Theta_{ij} \right) \delta^{ab} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$$

si ha

$$\{a^i, a^j\} = \int d^3x d^3y \left( \pi_a(x) G_{ab}^i G_{bc}^j \varphi_c(y) - i \epsilon_{ij} \right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{bb'}$$

$$= \int d^3x \pi [G^i, G^j] \varphi \quad (29)$$

ovvero  $[G^i, G^j]$  è il commutatore dei generatori  
del gruppo visti come matrici.

Per quanto concerne le trasformazioni che affettano le coordinate ci interessano ovviamente le trasformazioni del gruppo di Poincaré, che ora studiamo.

i) Traslazioni  $x_\mu \rightarrow x_\mu + \varepsilon_\mu^\alpha \delta_\mu^\alpha$  (trasl. lungo l'asse  $\alpha$ ) (30)

$$\delta x_\mu = \varepsilon_\mu^\alpha \delta_\mu^\alpha$$

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x + \delta x) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x - \delta x)$$

$$\varphi'(x) = \varphi'(x'_\mu - \varepsilon_\mu) = \varphi'(x'_\mu) - \varepsilon_\mu^\alpha \partial_\mu \varphi$$

$$\delta \varphi = \varphi'(x) - \varphi(x) = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \varphi \quad (31)$$

$$\delta^\alpha \varphi = -\partial_\alpha \varphi$$

Abbiamo quindi quattro correnti conservate, che formano il tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu} = -j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \varphi} \partial_\mu \varphi - \mathcal{L} g_{\mu\nu} \quad (32)$$

con leggi di conservazione

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\mu P^\mu = 0 \quad (33)$$

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}$$

Notiamo che data una corrente di Noether possiamo ridurla in forme equivalenti aggiungendo ad essa una derivata totale conservata, ossia la derivata di un tensore antisimmetrico ("superpotenziale")

$$j^\mu \rightarrow j'^\mu = j^\mu + \partial^\mu f^{\nu\lambda}; \quad f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu} \quad (34)$$

~~tale che  $\partial_\mu f^\mu = 0$  in quanto la nuova corrente è ancora~~  
infatti

$$\partial_\mu j'^\mu = \partial_\mu j^\mu + \partial_\mu \partial_\nu f^{\mu\nu} = 0$$

sicché la nuova corrente è ancora conservata

~~conservata~~ e dà luogo alle stesse cariche. In particolare, possiamo quindi ridefinire

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T'^{\mu\nu} = \partial_\rho A^{\rho\mu\nu} + T^{\mu\nu} \quad (35)$$

dove

$$A^{\rho\mu\nu} = -A^{\mu\rho\nu} \quad (36)$$

Possiamo quindi in particolare sempre scegliere le  $A^{\rho\mu\nu}$  in modo che  $T'^{\mu\nu} = T'^{\nu\mu}$ . La forma simmetrica del tensore energia-impulso è quella che si accoppia alla gravità: infatti la covarianza generale implica che, come è noto,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta I}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (37)$$

ii) Trasformazioni di Lorentz

$$x'^\mu = \left( 1 - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} \right)^\mu_\nu x^\nu \quad (38)$$

$$\delta x_\mu = \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})^\nu_\mu x^\nu \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x') &= A \varphi(x) \\ &= \left( 1 - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \varphi(x) \end{aligned} \quad (40)$$

dove  $\Sigma_{\alpha\beta}$  forniscono una rappresentazione dei generatori nello spazio dei campi.

Abbiamo

$$\varphi'(x) = \left( 1 - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \varphi(x' - \delta x) \quad (41)$$

$$= \varphi(x) - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \varphi(x) + \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \varphi$$

$$\delta \varphi(x) = -\frac{i}{2} \left( \Sigma_{\alpha\beta} \varphi - J_{\alpha\beta}^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \varphi \right) \quad (42)$$

Abbiamo quindi i conservati:

$$j^{\alpha\beta}_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta^{\alpha\beta} \varphi + \mathcal{L} \delta^{\alpha\beta} x^\mu$$

$$= -\frac{i}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \left( \Sigma_{\alpha\beta} \varphi - \mathcal{J}_{\alpha\beta}^\rho \sigma^\rho x^\sigma \partial_\rho \varphi \right) + \mathcal{L} (\mathcal{J}_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu x^\nu \right] \quad (43)$$

$$= \frac{i}{2} \left[ \mathcal{J}_{\alpha\beta}^\rho x^\nu \left( -2 g_{\rho\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \varphi} \partial_\nu \varphi \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \Sigma_{\alpha\beta} \varphi \right] \quad (44)$$

$$= \frac{i}{2} \left( (\mathcal{J}_{\alpha\beta})^\rho{}_\nu x^\nu T^{\rho\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \Sigma_{\alpha\beta} \varphi \right)$$

e usando ora la forma esplicita eq. (11') dei generatori nella rapp. fondamentale abbiamo infine  $(\mathcal{J}_{\alpha\beta}^\rho{}_\nu = i[g_{\alpha\rho} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\rho}])$

$$j^{\alpha\beta}_\mu = \frac{1}{2} \left( -T^{\alpha\mu} x^\beta + T^{\beta\mu} x^\alpha - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \Sigma_{\alpha\beta} \varphi \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \Sigma_{\alpha\beta} \varphi \right)$$

$$= \mathcal{L} \overset{\mu\alpha\beta}{\underbrace{\quad}} + \overset{\mu\alpha\beta}{\underbrace{\quad}} \quad (45)$$

$$\mathcal{L} \overset{\mu\alpha\beta}{\underbrace{\quad}} = \frac{1}{2} (x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha})$$

$$\overset{\mu\alpha\beta}{\underbrace{\quad}} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \Sigma_{\alpha\beta} \varphi \quad (\text{dip. dalla rapp. del gruppo di Lorentz portata da } \varphi / 2g)$$

con

Studiamo ora in particolare il caso delle rotazioni e quello dei boost, nel caso di un campo scalare

- Per rotazioni le correnti e cariche conservate sono

$$J^i = \epsilon^{ijk} \int d^3x \ j_{jk}^i \quad (46)$$

$$j_{jk}^i = L^{ijk} + S^{ijk} \quad (47)$$

da cui vediamo che

$$L^{ijk} = \frac{1}{2} (x^i p^j - x^j p^i) \quad (48)$$

dove  $p^i = T^{0i}$  (49)

e la densità di impulso, per cui riconosiamo  $L^i = \epsilon^{ijk} L^{0jk}$  come la densità di momento angolare orbitale:  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

Se il campo non fosse scalare, ~~il momento angolare~~  $S^i = \epsilon^{ijk} S^{0jk}$  e la densità di spin: ad esempio se i campi portano una rapp. di spin 1/2 del gruppo delle rotazioni,  $i\epsilon^{ijk} \Sigma_{jk} = \sigma^i$ , la i-esima matrice di Pauli.

- Per boost le correnti conservate sono

$$K^i = \int d^3x \ j_{0i}^0 \quad (50)$$

$$j_{0i}^0 = \frac{1}{2} (x^i \mathcal{H} - t \theta^i) \quad (51)$$

dove  $\mathcal{H}$  è la densità di hamiltoniana.

L'interpretazione di questa quantità <sup>(per campi scalari)</sup> si ha notando che ~~che~~  $\theta^i$  ~~è~~ <sup>na</sup> costante del moto. Questo vuol dire che

$$\bar{x}_B = \int d^3x \bar{x} \mathcal{H} \quad (52)$$

si muove di moto rettilineo uniforme. Questa è la versione relativistica del teor. del baricentro, definito come la posizione pesata con l'energia (ovvero la massa) come nel caso non-relativistico.

Mostriamo infine che per campi non scalari il tensore energia-impulso non può essere simmetrico usando la definizione alla Noether, ma può essere simmetrizzato per teorie invarianti di Lorentz.

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu T^{\mu\rho\sigma} &= \partial_\mu \frac{1}{2} (x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}) + \partial_\mu S^{\mu\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (T^{\rho\sigma} - T^{\sigma\rho}) + \partial_\mu S^{\mu\rho\sigma} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\text{ossia} \quad T^{\rho\sigma} - T^{\sigma\rho} = -2 \partial_\mu S^{\mu\rho\sigma} \neq 0 \quad (54)$$

Possiamo però porre

$$T'^{\rho\sigma} = T^{\rho\sigma} + \partial_\mu (A^{\mu\rho\sigma}) \quad (55)$$

$$A^{\mu\rho\sigma} = (S^{\mu\rho\sigma} - S^{\rho\mu\sigma} - S^{\sigma\mu\rho}) \quad (56)$$

dimodoché

$$\begin{aligned} T'^{\rho\sigma} - T'^{\sigma\rho} &= T^{\rho\sigma} - T^{\sigma\rho} + \partial_\mu (S^{\mu\rho\sigma} - S^{\mu\sigma\rho}) \\ &= -2 \partial_\mu S^{\mu\rho\sigma} + 2 \partial_\mu S^{\mu\sigma\rho} \end{aligned} \quad (57)$$

avendo usato la Eq. (54) e l'antisimmetria di  $S^{\mu\rho\sigma}$  rispetto a  $\rho\sigma$  (costanza di Belinfante).

## 2 Quantizzazione dei campi

### 1. Il campo scalare

D'ora in poi consideriamo la teoria relativistica, e quindi scalari di Lorentz. La Lagrangiana eq. (3.18) è immediatamente scalare <sup>in 2d</sup> se si prende  $\lambda = 1$ . Può facilmente essere promossa a scalare 4D definendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

e supponendo che  $\phi(x)$  sia uno scalare di Lorentz, tale cioè che  $\phi'(x') = \phi(x)$ .  
Notiamo anche che il termine cinetico è il termine minimale contenente almeno una derivata temporale, scalare. Termini con più derivate temporali non sono superiori nel senso che collegano le eq.

Un termine lineare, del tipo  $\int d^4x \phi(x)$ , non è accettabile nella definizione di  $\phi$ , perché non è invariante sotto la traslazione. Definiamo che, per un campo scalare,  $[m] = [L]$  e quindi anche  $[m] = [L]$ .

Postiamo ora che sotto quantizzazione questa teoria descrive eccitazioni elementari di massa  $m$ ; lo spin è 0 in quanto ad ogni punto dello spaziotempo vi è un unico grado di libertà.

~~Per la~~ Le eq. del moto derivano da

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (2)$$

mentre il tensore energia-impulso è dato da

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (3)$$

Notiamo che la densità di energia coincide con la densità di hamiltoniana ottenuta dal formalismo canonico,  $T^{00} = \mathcal{H}$ , dimododoché la hamiltoniana è

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 + \vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^2) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \dot{\varphi} | \dot{\varphi} \rangle + \langle \varphi | W | \varphi \rangle = T + V \quad (5)$$

usando la notazione introdotta quando abbiamo determinato le coordinate normali. Possiamo verificare esplicitamente che in termini di queste, date da (Eq. (45))  $\langle \vec{k} | \varphi \rangle = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \varphi(\vec{x})$  la hamiltoniana si disaccoppia:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \langle \dot{\varphi} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \dot{\varphi} \rangle + \langle \varphi | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \varphi \rangle (\vec{k}^2 + m^2) \right] \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ |\dot{\varphi}(\vec{k})|^2 + (\vec{k}^2 + m^2) |\varphi(\vec{k})|^2 \right] \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ |\dot{\varphi}(\vec{k})|^2 + \omega^2 |\varphi(\vec{k})|^2 \right] \quad (8)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{H}(\vec{k}) \quad (9)$$

ovvero la densità di hamiltoniana per la  $\vec{k}$ -esima coordinata normale  $\langle \varphi | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | T + V | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \varphi \rangle$  e

$$\mathcal{H}(\vec{k}) = \frac{1}{2} |\dot{\varphi}|^2 + \omega^2 |\varphi|^2 \dots \quad (10)$$

Questa è una hamiltoniana di oscillatore armonico per la  $\vec{k}$ -esima coordinata normale, ed infatti ricordiamo la soluzione generale classica

$$\phi(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( a(\vec{k}) e^{-i\omega t} + a^*(-\vec{k}) e^{i\omega t} \right) \quad (11)$$

dove ricordiamo che la rel. fra coefficienti dell'onda progressiva e regressiva è fissata dalla condizione di realtà del campo. Ora ricordiamo che in MQ l'osc. armonico si quantizza scrivendo la coordinata canonica  $q$  in termini di operatori  $a, a^\dagger$  come

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad (12)$$

dove  $[a, a^\dagger] = 1 \quad (13)$

e in rapp. di Heisenberg

$$q_{H,t}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left( a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t} \right) \quad (14)$$

Quantizziamo dunque il campo come oscillatori armonici facendo

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (15)$$

Notiamo che il fattore  $(2\pi)^3$  è convenzionale (cambia la normalizzazione degli stati) ma è consistente con il fatto che le frequenze per un sistema di lunghezza  $L$  con cond. periodiche sono  $k_n = \frac{2\pi n}{L}$ , dunque

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\vec{k}} \rightarrow \int d^3\vec{k} ; \quad \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \rightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').$$

Notare che non dividiamo per  $L^3$  e quindi la norm. è infinita:  $\delta^{(3)}(0) \sim L^3$

Il campo quantizzato è dunque l'operatore canonico alla Heisenberg

$$\psi(\vec{x}) = \sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( e^{-ikx} a(\vec{k}) + e^{ikx} a^\dagger(\vec{k}) \right)$$

$$= \sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} a(\vec{k}) + e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} a^\dagger(\vec{k}) \right) \quad (16)$$

Il fatto che la dip. da  $t$  sia la stessa che nel caso classico  
 è conseguenza del teorema di Ehrenfest: le coord. canoniche  
 e momenti delle eq. classiche del moto.

È interessante determinare esplicitamente l'espressione della  
 hamiltoniana in termini di operatori di creazione e distruzione, ossia  
 di operatori canonici.

Abbiamo

$$H = \sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}} \frac{1}{2\omega_k} \left\{ \omega_k \left( a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t} \right)^2 + \omega_k^2 \left( a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t} \right)^2 \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}} \frac{\omega_k}{4} \left[ \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t} \\ a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t} \\ a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}} \frac{\omega_k}{4} 2 \left( a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger \right) \quad (17)$$

Notare che: - i termini  $a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger$  e  $a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$  si semplificano - la  $H$  non  
 dipende dal tempo (come deve)

Possiamo riscrivere l'ultimo passaggio come

$$H = \sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}} \omega_k \left( a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \right) \quad (18)$$

Gli operatori  $a_k$  alla Heisenberg soddisfanno le eq. classiche del moto (come in seguito verificheremo esplicitamente), e dunque

$$a^{\dagger}(\vec{k}, t) = e^{-i\omega t} a^{\dagger}(\vec{k}) \quad (15')$$

Possiamo corrispondentemente definire un operatore di campo alla Heisenberg nello spazio "delle coordinate" di partenza:

$$\phi^H(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( e^{-ikx} a(\vec{k}) + e^{ikx} a^{\dagger}(\vec{k}) \right) \quad (16)$$

$$kx = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

Ovviamente, il passaggio alle coord. normali disaccoppia la hamiltoniana, che è corrispondentemente conservata. Verifichiamo esplicitamente anche per tenere conto della non-commutatività degli operatori:

\*\*\*

$$= :H: + \frac{\int d^3k}{(2\pi)^3} \omega \delta^{(3)}(0) \quad (15) (21)$$

$\nwarrow$  fatt. di volume  
 $\nwarrow$  dens. di energia

con

$$:H: = \frac{\int d^3k}{(2\pi)^3} \omega a_k^\dagger a_k \quad (16) (22)$$

Notiamo che  
 (ordinamento normale: tutti gli op. di distruggere a destra)  
 $\frac{d}{dt} a_k = \frac{i}{\hbar} [a_k, H] = \frac{i}{\hbar} \omega_k a_k$  come si è detto  
 Notare che:  $\delta^{(3)}(0)$  è un fatt. di volume, ma anche la dens. di energia  
 Il calcolo quasi identico porta a determinare per tutti i valori di  $\vec{k}$ .

$$:\vec{P}: = \frac{\int d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} a_k^\dagger a_k \quad (17) (23)$$

Mostriamo quindi che gli stati

$$|\vec{k}\rangle = a_k^\dagger |0\rangle \quad (18)$$

sono autostati dell'impulso

$$P^\mu |\vec{k}\rangle = k^\mu |\vec{k}\rangle \quad (19)$$

con

$k^\mu = (\omega, \vec{k})$ ;  $\omega = \sqrt{k^2 + m^2} \Rightarrow$  questo dimostra che si tratta di stati massivi!  
 D'ora in poi  $\omega \rightarrow E$   
 È facile verificare che sono anche autostati dello spin aventi  $s=0$ : infatti per ogni punto dello spaz. tempo abbiamo un unico grado di libertà, scalare sotto Lorentz.

Quindi  $|\vec{k}\rangle$  sono stati ad una particella. Lo spazio degli stati fisici è lo spazio somma diretta degli spazi a 1, 2, ... int. parte, ciascuno dei quali richiede occupando  $n$  stati di impulso (magari o diversi) e eventualmente simmettizzando come richiesto dal teorema spin-statistica (spazio di Fock):

$$F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n; \quad \mathcal{H}_n = \bigoplus_{i_1, \dots, i_n} \mathcal{H}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{i_n} \quad (19')$$

Discutiamo brevemente la normalizzazione degli stati.

Conviene scegliere la normalizzazione in modo che il prodotto tra stati sia uno scalare di Lorentz (e' un'ampiezza di probabilità). Notiamo che  $\langle \bar{k}' | \bar{k} \rangle = \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}')$  non e' quindi una buona normalizzazione, perche'  $\delta^{(3)}$  non e' scalare, in quanto  $d^3k$  non lo e'.

Notiamo pero' che

$$\frac{d^3k}{2E} = d^4k \delta(k^2 - m^2) \Theta(E) \quad (20)$$

e' manifestamente scalare.

Inoltre ovviamente  $d^3k \delta^{(3)}(\bar{k})$  e' scalare. Quindi

$d^3k \delta^{(3)}(\bar{k}) = \frac{d^3k}{2E} 2E \delta^{(3)}(\bar{k})$  e' scalare, ma poiche'

$\frac{d^3k}{2E}$  e' scalare,  $2E \delta^{(3)}(\bar{k})$  e' scalare. Possiamo

quindi normalizzare gli stati come

$$\langle \bar{k}' | \bar{k} \rangle = 2E \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}') (2\pi)^3 \quad (21)$$

che implica

$$|\bar{k}\rangle = \sqrt{2E} a_{\bar{k}}^\dagger |0\rangle. \quad (22)$$

Notare che se avessi posto  $cp = \sqrt{\frac{d^3k}{2\omega}} (\bar{a} e^{-i\bar{k}x} + h.c.)$ ,  $\bar{a} = a \Rightarrow \bar{a} = \sqrt{2\omega} a$

Non costruiamo qui gli altri generatori del gruppo di Lorentz, ma c'è  $\bar{a} = \sqrt{2\omega} a$

Limitiamo ad osservare che

- gli operatori soddisfanno le relazioni di commutazione del gruppo di Lorentz

- il momento angolare non e' diagonale nella base delle onde piane

Osserviamo inoltre che possiamo definire un operatore di campo canonico alla Heisenberg  $\pi^H(\vec{x}, t)$  che soddisfa relazioni di commutazione canoniche con il campo  $\phi(\vec{x}, t)$  Eq. (16) a tempi uguali:

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (23)$$

È facile verificare che, espresso in termini degli  $a$  e  $a^\dagger$ , questa operazione si ottiene dal campo classico  $\pi = \dot{\phi}$  sostituendo  $a$  con gli operatori corrispondenti:

$$\pi = \sqrt{\frac{d^3k}{(2\pi)^3}} \frac{-i\omega}{\sqrt{2\omega}} \left( a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \right) \quad (24)$$

Notiamo che  $\pi$  non è l'operatore impulso (e  $\phi$  non è l'operatore posizione!).

L'operatore impulso è quello dato dalla Eq. (19), e genera le traslazioni nel senso che

$$[P^\mu, \phi(\vec{x})] = -i \partial_\mu \phi(\vec{x}) \quad (25)$$

## Commenti sull'operatore d'ampo

- 1) Che cos'è? È una coordinata Lagrangiana per ogni punto dello spazio, quantizzata, ma accoppiata a punti diversi dello spazio: quindi è una sovrapposizione di op. di creazione e distruzione, accoppiati
- 2) è un op. alla Heisenberg: l'op. di distruzione disaccoppiato dipende dal tempo come

$$a_k(t) = e^{-i\omega_k t} a_k^{\text{sch.}}$$

- 3) Ne segue che gli autostati ed autovalori di  $\phi(\vec{x}, t)$  soddisfanno

$$\phi(\vec{x}, t) |\phi(\vec{x})\rangle = \phi(\vec{x}, t) |\phi(\vec{x})\rangle$$

Vanno pensati come una base completa nello spazio di Hilbert <sup>a un corpo</sup> nel senso che per ogni  $\vec{x}$  (visto come indice) vi è una  $\phi(\vec{x})$  indipendente. Una "funzione d'onda" è un funzionale:

$$\langle \phi(\vec{x}) | \Psi \rangle = \Psi[\phi(\vec{x})]$$

Sul quale le osservabili agiscono come operatori differenziali funzionali.

## 2. Più gradi di libertà

Possiamo ora considerare il caso in cui ad ogni punto dello spaziotempo associamo più di un grado di libertà.

Il più semplice caso è quello del campo scalare canonico, la cui lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2 \quad (27)$$

Questa lagrangiana è invariante sotto

$$\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi = \phi' \quad (28)$$

Il che dà luogo alla corrente di Noether (notare che  $\phi, \phi^*$  sono indipendenti) (29)

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \delta \phi^* \quad j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

La quantizzazione di questo campo è identica a quella già vista nel caso del campo scalare, eccett. che ora viene a mancare la condizione di realtà, e quindi la soluzione classica generale è

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( a_k e^{-ikx} + b_k e^{ikx} \right) \quad (30)$$

dove ora  $a_k$  e  $b_k$  sono operatori indipendenti che soddisfano condizioni indipendenti di quantizzazione della forma

$$[a_k, a_{\vec{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}) \quad (31)$$

Il tensore energia impulso è ora dato da (notare che  $\phi, \phi^*$  vanno trattati come campi indipendenti)

$$T^{\mu\nu} = 2\partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (32)$$

da cui

$$H = \int d^3x \mathcal{H}^{00} = \int d^3x |\dot{\varphi}|^2 + \bar{\psi} \not{\partial} \psi + m \bar{\psi} \psi$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k (a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k) \quad (33)$$

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k) \quad (34)$$

La cui dimostrazione viene data per esercizio.

S: vedremo che vi sono due specie di stati liberi, caratterizzati dalla stessa energia-impulso, ma da carica opposta ("particelle" e "anti-particelle").

Un'osservazione interessante, ma di interesse storico, è che gli stati  $b$  sono associati a "soluzioni di energia negativa" (cioè  $\omega = -\sqrt{k^2 + m^2}$ ), che "distingono", in quanto il relativo coefficiente è  $b^\dagger$ . Questo dà luogo all'interpretazione del "mare di Dirac", di puro interesse storico.

Passiamo ora a stati di spin 1. Consideriamo in particolare il caso del campo elettromagnetico.

Ricordiamo alcuni risultati derivanti dalla formulazione lagrangiana dell'elettrodinamica.

La lagr. di Maxwell è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \quad (35)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (36)$$

che dà luogo alle eq. di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (37)$$

ossia 
$$\partial_\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu \quad (38)$$

Notiamo che  $[A] = [L]^{-1}$  come si vede sia dal termine "libero" che dal termine di accoppiamento. Per consistenza si deve avere  $\partial_\mu j^\mu = 0 = \partial_\mu \partial^\mu F^\mu{}_\mu$

Notiamo che la lagrangiana è invariante sotto

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta, \quad (40)$$

incluso il termine di accoppiamento visto che

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \theta j^\mu \quad (41)$$

$$\delta I = \int d^4x \partial_\mu \theta j^\mu = - \int d^4x \theta \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (42)$$

se i campi si annullano a infinito.

Questa "invarianza di gauge" è in realtà una ridondanza nella descrizione del sistema. Infatti, corrisponde al fatto che i gradi di libertà fisici sono due, non è una "vera" simmetria (le cariche di Noether conservate si annullano).

Notiamo infatti che uno dei quattro campi  $A_\mu$  può essere eliminato usando la eq. (40). Notiamo inoltre che l'eq. per  $A^0$  può essere scritta nella forma

$$\cancel{\partial^\mu \partial_\mu A^0} - \Delta A^0 - \cancel{\partial_0 \partial_\mu A^\mu} + \partial_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = j^0 \quad (43)$$

ossia

$$-\Delta A^0 + \partial_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = j^0 \quad (44)$$

Questa è una eq. del primo ordine nei tempi, e quindi è un vincolo. Vi sono quindi solo due eq. dinamiche

consistere con l'osservare che una noep. a massa nulla del gruppo di Lorentz ha solo due gradi di libertà.

Le coordinate canoniche (sol delle eq. classiche del mda) sono indecise a massa nulla, in quanto possiamo dapprima scegliere la gauge di Lorentz

$$\partial_\mu A_\mu = 0$$

(45)

dove

$$\square A^\mu = 0$$

(46)

e in qualunque altra gauge

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta.$$

(47)

Se

$$A_\mu(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} A_\mu(\vec{x})$$

(48)

$$A'_\mu \theta(k) = \int d^4x e^{ikx} \theta(x)$$

(49)

$$A'_\mu(k) = A_\mu(k) - i k_\mu \theta(k)$$

(50)

Per capire quali sono i gradi di libertà fisici studiano ora le cariche conservate

~~consistente con l'osservazione che una rappresentazione a  
manca nulla del gruppo di Lorentz ha solo due gradi di  
libertà.~~

Il tensore energia-impulso è

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (37)$$

In particolare la densità di energia è

$$T^{00} = \mathcal{H} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (38)$$

e la densità di impulso

$$T^{0i} = \mathcal{P}^i = \varepsilon^{ijk} E_j B_k \quad (39)$$

(vett. di Poynting).

La densità di spin è

$$S^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} S^{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} S^{0j} A_k \quad (40)$$

$$S^{0j} = E_j A_k \quad (41)$$

Notiamo che in generale lo spin non è invariante di gauge:  
infatti se  $A_i \rightarrow A_i + \partial_i \theta$

$$S^i = \int d^3x \varepsilon^{ijk} E_j A_k \rightarrow S^i + \int d^3x \varepsilon^{ijk} E_j \partial_k \theta$$

Sotto una trasformazione di gauge, la  $k$ -esima onda  
si trasforma secondo  $A^\mu(k) \rightarrow A^\mu(k) + k^\mu \theta(k)$

Dunque vediamo che

Le osservabili diventano così

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k (a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k) \quad (6)$$

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k) \quad (7)$$

Gli operatori di prima trasf. di  $\bar{\psi}$  (costruzione dello scalare  $\bar{\psi}\psi$ ) e di seconda trasf. di  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$  nella "in quarto" stati appaiono  $\rightarrow$  rispetto agli  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  formale (o dalla eq. (6).

### 2.3 Campo fermionico

### 2.3 Il campo di Dirac

La costruzione di una teoria di campi fermionici richiede due ingredienti fondamentali: (1) dei campi che ad ogni punto nello spazio tempo si trasformano secondo la rapp. di spin  $1/2$  del gruppo di Lorentz; (2) una regola per costruire oggetti vettoriali da questi campi, in modo da poter formare un prodotto scalare con un vettore di derivate.

Entrambi i requisiti sono soddisfatti grazie alla seguente costruzione (di Dirac): date quattro matrici  $\gamma^\mu$   <sup>$n \times n$</sup> , tali che  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_{n \times n}$  (8)

le matrici 
$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \leftarrow \text{notare che se } \gamma^\mu, \gamma^\nu \text{ fossero hermitiane questo } \sigma^{\mu\nu} \text{ sarebbe pure hermitiano} \quad (9)$$

soddisfano l'algebra del gruppo di Lorentz.  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger = -[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

Per capire il significato, osserviamo che questo è vero per il

gruppo di Lorentz in 3 dimensioni (o per il gruppo delle rotazioni se  $\{\delta^{\mu\nu}\} = 2\delta^{\mu\nu} \mathbb{1}$ ).

In tal caso la rapp. di più piccola dim. è  $n=2$ , e possiamo quindi <sup>cercare di</sup> costruire le matrici  $2 \times 2$  tali che

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij} \quad (10)$$

Tali matrici sono le matrici di Pauli, a meno di un fattore:

Ma in tal caso  $\gamma^i = i\sigma^i$

$$\sigma^{ij} = \frac{-i}{4} [\sigma^i, \sigma^j] = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \sigma^k \quad (11)$$

che sono proprio i generatori del gruppo delle rotazioni.

(Nel caso d-dimensionale, si dimostra che le  $\gamma$  devono avere dimensione  $n = 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ , ossia  $n=2$  se  $d=2,3$ ;  $n=4$  se  $d=4,5$  e così via).

Vi sono naturalmente infinite rappresentazioni delle  $\gamma^\mu$ , visto che una trasf. unitaria  $\gamma^\mu \rightarrow U \gamma^\mu U^{-1}$  lascia invariata la eq. (8). Una rapp. conveniente è la rapp. di Weyl (o chiral)

in cui  $\gamma^0$  è  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ . (12)

In questa rapp. i generatori delle rotazioni sono

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}; \quad \vec{S} = \frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} \sigma^{jk} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Notiamo inoltre che i gen. di boost sono

$$K^i = \sigma^{0i} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

patente radiano da qualche  
sarebbe (1/2, 0) e (0, 1/2)

visto che sono  $3 \times 3$  ~~matrici~~

Si vede con esplicitamento che le  $\sigma^{\mu\nu}$  generano sugli stati  $n$ -dimensionali una rappresentazione di  $S = 1/2$  del gruppo di Lorentz. Vediamo quindi (a) lo stem mettendo un'aria che rapp  
(1/2,0); (b) questo come accennato ha lo stesso old. di una rapp. vettoriale.  
Notiamo inoltre che la eq. (8) implica immediatamente che

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0; \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad (14)$$

in fatti da (8) infer

$$\gamma^0 \gamma^0 = 1 \quad (15)$$

$$\gamma^i \gamma^i = -1 \quad (17)$$

che a loro volta implicano che gli autovalori di  $\gamma^0$  sono  $\pm 1$ ,  
e quelli di  $\gamma^i$  sono  $\pm i$ . Ma l'hermiticità è invariante  
sotto transf. unitarie, quindi ne segue l'asserto. Combinando  
la (14) e la (8) abbiamo

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (18)$$

La proprietà che permette di costruire lagr. invarianti e l'analogo  
della proprietà delle matrici di Pauli di lavorare in vettore  
nella rapp aggiunta del gruppo delle rotazioni:

$$R_{1/2}^{-1} \sigma^i R_{1/2} = R_{ij} \sigma^j \quad (19)$$

Nel nostro caso si ha

$$\Lambda_{1/2}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{1/2} = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (20)$$

dove

$$\Lambda^\mu_\nu = \exp -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \quad (21)$$

e la trasf. di Lorentz nella rapp. spinoriale (generatori eq. (9)) e

$$\Lambda_{1/2}^{\mu} = \exp -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \quad (22)$$

la trasf. di Lorentz nella rapp. vettoriale, in cui

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} = i \left( g^{\mu\alpha} g^{\nu}_{\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu}_{\beta} \right) \quad (23)$$

Questa proprietà implica immediatamente che se  $\psi$  si trasforma come uno spinore, allora  $\psi^T \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi$  si trasforma come un vettore. Infatti se

$$\psi \rightarrow \psi' = \Lambda_{1/2} \psi = \exp -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \psi \quad (24)$$

allora

$$\begin{aligned} \psi^T &\rightarrow \psi'^T = \psi^T \Lambda_{1/2}^T = \\ &= \psi^T \exp \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu})^T \end{aligned} \quad (25)$$

Ma notiamo che

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})^T &= -\frac{i}{4} [\gamma^{\mu+}, \gamma^{\nu+}] = \\ &= -\frac{i}{4} [\gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0, \gamma^0 \gamma^{\nu} \gamma^0] = \\ &= \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (26) \end{aligned}$$

Pertanto se

definiamo

$$\bar{\psi} \equiv \psi^T \gamma^0$$

$$(27) \quad \int$$

allora

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \psi^\dagger \left( \exp \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu})^\dagger \right) \delta_0 \\
 &= \psi^\dagger \left( \exp \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \delta_0 \sigma^{\mu\nu} \delta_0 \right) \delta_0 \\
 &= \bar{\psi} \exp \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\
 &= \bar{\psi} \Lambda^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi \rightarrow \bar{\psi} \Lambda_{1/2}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{1/2} \psi = \\
 &= \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Possiamo quindi definire un campo fermionico  $\psi(x)$  che si trasforma sotto Lorentz come

$$\psi'(x') = \Lambda_{1/2} \psi(x)
 \tag{30}$$

se

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu
 \tag{31}$$

Vediamo subito che il termine cinetico minimale costruito da  $\psi$  e  $\bar{\psi}$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi
 \tag{32}$$

Immagini sotto la trasform. eq. (30)

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(x') \left( \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) \psi'(x')
 \tag{33}$$

$$= \psi(x) \gamma^\mu \left( \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi(x)$$

$$= \mathcal{L}(x) \quad (34)$$

Notiamo che questa lagrangiana ha una simmetria interna

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi \quad (35)$$

Le eq. dinamiche del moto sono banali. (36)

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0$$

Per la seconda eq. prendendo l'aggiunta di  $\bar{\psi}$  si ha  $\bar{\psi} (-i \not{\partial} - m) = 0$

Si usa la notazione  $(i \not{\partial} \gamma_0 \gamma^\mu - m \gamma_0) \psi = 0 \Rightarrow \gamma_0 (i \not{\partial} - m) \psi = 0$

Quindi l'eq. per il campo  $\bar{\psi}$  coincide con quella per il campo  $\psi$ .

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \gamma_\mu \equiv \not{\partial} ; \quad \rho_\mu \gamma_\mu \equiv \not{\rho} \quad (37)$$

da cui  $(i \not{\partial} - m) \psi = 0 ; \mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi$  ecc.

Il tensore energia-impulso è anch'esso semplicissimo:

$$T^{\mu\nu} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \not{\partial}^\nu \psi - g^{\mu\nu} \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \quad (38)$$

con hamiltoniana

$$H = \int d^3x \bar{\psi} (i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi \quad (39)$$

e impulso

$$\vec{P} = \int d^3x -i \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi \quad (40)$$

Infine, la corrente di Noether per la simmetria eq. (35)

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (41) \quad \sqrt{7}$$

Per determinare le coordinate canoniche, anche in questo caso risolviamo le eq. d'ampiezza del moto. Notiamo innanzitutto che ciascuna componente di  $\psi$  soddisfa separatamente l'eq. di Klein-Gordon (36) implicando

$$(i\partial + m)(i\partial - m)\psi = 0 \quad (42)$$

da cui

$$\left( -\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu - m^2 \right) \psi = 0 \quad (43)$$

ossia

$$(\square + m^2)\psi = 0. \quad (44)$$

Questo ci dice immediatamente che le soluzioni hanno la forma

$$\psi(x) = e^{\mp i k x} u_{\pm}(k) \quad (45)$$

Si usa la notazione

$$u_+(k) \equiv u(k) \quad (46)$$

$$u_-(k) \equiv v(k) \rightarrow \text{sol di energia negativa}$$

(ricordiamo  $\psi(t) = e^{\frac{i}{\hbar} E t} \psi_0 = e^{-i E t} \psi_0$ )

Gli spinori  $u, v$  soddisfanno l'equazione

$$(k - m)u(k) = 0 \quad (47)$$

$$(k + m)v(k) = 0 \quad (48)$$

Risolvendo le equazioni come

$$\frac{k}{m} u_{\pm} = \pm u_{\pm} \quad (49)$$

vediamo che il problema si riduce alla determinazione (8)

degli autovettori della matrice  $\frac{\underline{K}}{m}$ . Notiamo inoltre  
 a) che gli autovalori di questa matrice sono manifestamente  $\pm 1$ , infatti

$$\left(\frac{\underline{K}}{m}\right)^2 = \frac{K^2}{m^2} \mathbb{1} = \mathbb{1} \quad (51)$$

b) che dato un autovettore associato all'autovalore  $+1$  troviamo un autovett. associato all'autovalore opposto moltiplicando per la matrice

$$\gamma_5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\frac{i}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \quad (52)$$

con le proprietà

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad (53)$$

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1} \quad (54)$$

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad (55)$$

Ne deduciamo che vi sono due soluzioni per ogni segno di energia, legate da

$$\begin{aligned} u^{(2)}(k) &= \gamma_5 v^{(1)}(k) \quad z=1,2 \\ v^{(2)}(k) &= \gamma_5 u^{(1)}(k) \end{aligned} \quad (56)$$

~~S. dimostriamo facilmente che le due soluzioni corrispondono a stati di definito spin~~ Visto che  $\gamma_5$  è scalare, cambia con lo spin e quindi le due soluzioni possono essere scelte come i  
 Notiamo inoltre che nel caso di massa nulla possiamo che a tutti scegliere le nostre soluzioni come autostati simultanei dello spin e di  $\gamma_5$  (con autovalore nullo), e di  $\gamma_5$ . La eq. (54) infatti implica che gli a.v. di  $\gamma_5$  sono  $\pm 1$ . Ne segue che possiamo decomporre qualunque spinore  $\psi$  come

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_R + \psi_L = \left[ \frac{1+\gamma_5}{2} + \left( \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \right] \psi \\ &= (P_R + P_L) \psi \end{aligned} \quad (56)$$

$$S^i(k) = \varepsilon^{ijk} F_j \varepsilon_k$$

non è invariante ma  $S^i(k) u_i$  lo è. Ne segue che solo la spin lungo l'asse del moto è invariante definitivamente. La spin lungo un'asse qualunque può essere posto a zero per scelta di gauge. Possiamo dunque quantizzare il campo v.m. nel solito modo prendendo

$$A^\mu = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{s=1,2} \left( \varepsilon^\mu(k,s) a_k^s e^{-ikx} + \varepsilon^{\mu*}(k,s) a_k^{s\dagger} e^{ikx} \right) \quad (43)$$

$$\omega_k = k^2$$

dove  $[a_k^s, a_{k'}^{s'\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{ss'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (44)$

e la somma come su due vettori di polarizzazione tras-versi, accetti da

$$\varepsilon_s^\mu k_\mu = 0 = \varepsilon_s^\mu n_\mu \quad (45)$$

dove  $n^\mu n_\mu = 0, \quad n_\mu \neq 0 \quad (46)$

e la non.  $\varepsilon_\mu \varepsilon_\mu^* = -1 \quad (47)$

Specificamente, se  $k = (\omega, 0, 0, \omega), \quad n = (1, 0, 0, -1)$

$$\varepsilon_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

In termini degli op. di creazione e distruzione abbiamo

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_s \omega_k a_k^{s\dagger} a_k^s \quad (49)$$

$$P^i = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_s k^i a_k^{s\dagger} a_k^s \quad (50)$$

$$S^i = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_s \varepsilon^{ijk} \varepsilon_j^{*s} \varepsilon_k^s a_k^{s\dagger} a_k^s \quad (50')$$

(41)

Notiamo che  $P_e$  e  $P_c$  sono proiettori, infatti:

$$P_e^2 = P_c^2 = \mathbb{1} \quad (57)$$

Ma data una soluzione di  $H\psi = 0$ , manifestamente anche

$$\psi_e \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi \quad (58)$$

soddisfanno la stessa equazione. Si dimostra <sup>facilmente</sup> che questi due stati corrispondono ai due stati di chiralità per una particella di massa nulla e spin  $\frac{1}{2}$ .

Conviene normalizzare le sol. dell'eq. di Dirac come

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(s)}(p) u^{(s)}(p) &= m \delta^{ss} \quad (FD) & u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) &= 2E \delta^{ss} \\ \bar{v}^{(s)}(p) v^{(s)}(p) &= -2m \delta^{ss} \quad (FD) & u^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) &= 2E \delta^{ss} \end{aligned} \quad (59)$$

(notare  $m^2 u \geq 0$  per istruzione).

Ora sviluppiamo il campo di Dirac su una base di sol. dell'eq.

di Dirac:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_s \left( b_p^s u^{(s)}(p) e^{-ipx} + d_p^{s\dagger} v^{(s)}(p) e^{ipx} \right) \quad (59)$$

Sostituendo nell'espressione del tensore energia-impulso

so eq. (38-40) troviamo

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \psi^\dagger (i \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m \gamma^0) \psi \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left( b_p^{s\dagger} b_p^s - d_p^s d_p^{s\dagger} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

Quindi se quantizziamo

$$[b_p^s, b_{p'}^{s\dagger}] = \delta^{ss'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (61)$$

$$[d_p^s, d_{p'}^{s\dagger}] = \delta^{ss'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

troviamo che non esiste lo stato fondamentale (!).

Siano pertanto portati a quantizzare con

$$\{b_p, b_{p'}^\dagger\} = \delta_{p,p'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (62)$$

$$\{d_p, d_{p'}^\dagger\} = \delta_{p,p'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (63)$$

$$\{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = \{d, d\} = \{d^\dagger, d^\dagger\} = 0 \quad (64)$$

Troviamo così

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left( b_p^\dagger b_p + d_p^\dagger d_p \right) \quad (65)$$

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left( b_p^\dagger b_p - d_p^\dagger d_p \right) \quad (66)$$

Notiamo che da eq. (64) implica

$$bb = b^\dagger b^\dagger = dd = d^\dagger d^\dagger = 0$$

Su qualunque stato, e quindi il principio di Pauli (67)

#### 2.4 Teoria di accoppiamento (interazione)

Abbiamo derivato da a livello classico il termine di sorgente nelle eq. di Maxwell si ottiene da un accoppiamento  $L_I = j_\mu A_\mu$  dove  $j_\mu$  è una corrente conservata. Dal punto di vista della teoria quantistica un termine di tal fatta ha le seguenti proprietà:

1) è automaticamente antisimmetrico, infatti  $\int d^3x j^0 = 1$  deve essere una carica (indimensionale). Notiamo che nel caso barionico  $[4] = [L]^{3/2} = [E]^{3/2} \quad (68)$

2) si tratta di un termine che genera stati transizioni

$$\vec{Z} = \int d^3x \psi^\dagger \vec{Z} \psi \quad \vec{Z} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \% \quad (11) \quad 51$$

Osserviamo che anche nel caso del campo fermionico possiamo definire un formalismo canonico. Vista della lagrangiana e del primo ordine nelle derivate temporali, si ha

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i \bar{\psi} \gamma^0 = i \psi^\dagger \quad (68)$$

e quindi questo spiega perché l'hamiltoniana non contiene derivate temporali, come abbiamo visto. Le relazioni di anticommutazione tra operatori di creazione e distruzione implicano ma corrispondente relazioni di anticommutazione fra campi:

$$\{\psi_a(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{y}, t)\} = \{\psi_a(\vec{x}, t), \psi_b^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab} \quad (69)$$

dove  $a, b$  sono indici sulle componenti dello spinore di Dirac.

# III Campi in interazione

## 3.1 Interazioni e path integral

Finora abbiamo studiato sistemi di particelle libere, cioè tali per cui lo stato iniziale sia in cui il sistema è preparato nello spazio di Fock resta invariato nel tempo.

Se aggiungiamo ulteriori termini alla lagrangiana o hamiltoniana, ~~questi~~ supponendo di preparare il sistema e poi osservarlo in stati della teoria libera: termini che possono indurre transizioni fra stati nello spazio di Fock.

— In formalismo hamiltoniano, questa situazione viene studiata usando la rappresentazione di interazione, in cui si suppone che gli stati iniziali e finali siano costruiti come autostati di operatori che evolvono con la hamiltoniana libera: quindi ad esempio come autostati della hamiltoniana libera stessa.

— In tal caso si ha che l'ampiezza di transizione è data da

$$A_{\beta\alpha} = \langle \beta(t_1) | S(t_1, t_0) | \alpha(t_0) \rangle \quad (70)$$

dove

$$A | \alpha(t_0) \rangle = \lambda_\alpha | \alpha(t_0) \rangle \quad (71)$$

$$B | \beta(t_1) \rangle = \lambda_\beta | \beta(t_1) \rangle \quad (72)$$

$$\begin{matrix} A(t) \\ B(t) \end{matrix} = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \quad (73)$$

$$S(t_1, t_0) = T \exp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt' V_I(t') \quad (74)$$

$$H = H_0 + V$$

(75)

$$V_I(t) = S_0^{-1} V_I S_0$$

(76)

$$S_0 = \exp \frac{i}{\hbar} H t$$

(77)

Tuttavia un modo che particolarmente in teoria dei campi è più efficiente per valutare l'ampiezza di transizione è di usare un metodo funzionale. Il metodo funzionale permette in generale di determinare la ampiezza di transizione tra due stati dello spazio di Hilbert (in MB) o di Fock (in QFT) senza far riferimento ad un'esplicita rappresentazione, ma semplicemente assegnando il ket di stato iniziale e quello finale come ora ricordiamo.

Il vantaggio del formalismo canonico (e della rapp. di interazione) o di essere manifestamente unitario, mentre il vantaggio di quello funzionale è di essere manifestamente covariante e indip. dalla scelta di rappresentazione. Per fornire cioè anche il formalismo sia unitario, lo dimostriamo a partire da quello canonico.

Consideriamo dapprima il caso della MB. ~~Consideriamo~~  
Consideriamo l'ampiezza generica

$$A_{\beta\alpha} = \langle \beta(t_1) | S(t_1, t_0) | \alpha(t_0) \rangle$$

(78)

e introduciamo risolvendo dell'identità rispetto a una base di coordinate canoniche

$$A_{\beta\alpha} = \int dq_1 dq_0 \langle \beta(t_1) | q_1 \rangle \langle q_1 | S(t_1, t_0) | q_0 \rangle \langle q_0 | \alpha(t_0) \rangle$$

(79)

Osserviamo che l'elemento di matrice dell'op. di evoluzione temporale è associativo come conseguenza dell'unitarietà:

$$\begin{aligned}\langle q_1 | S(t_1, t_0) | q_0 \rangle &= \langle q_1 | S(t_1, \bar{t}_0) S(\bar{t}_0, t_0) | q_0 \rangle = \\ &= \int d\bar{q} \langle q_1 | S(t_1, \bar{t}) | \bar{q} \rangle \langle \bar{q} | S(\bar{t}, t_0) | q_0 \rangle \quad (80)\end{aligned}$$

Calcoliamo quindi l'el. di matrice per un'evoluzione temporale infinitesima:

$$\begin{aligned}\langle q' | S(t+\varepsilon, t) | q \rangle &= \langle q' | \left( 1 + \frac{i}{\hbar} H(\hat{p}, \hat{q}) \varepsilon \right) | q \rangle = \\ &= \int dp \langle q' | p \rangle \langle p | \left( 1 + \frac{i}{\hbar} H(\hat{p}, \hat{q}) \varepsilon \right) | q \rangle \quad (81)\end{aligned}$$

dove  $[p, q] = -i$  (82)

(il momento canonico genera la traslazione di  $q$ )

sicché

$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp i p q \quad (83)$$

Dunque

$$\langle q' | S(t+\varepsilon, t) | q \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i p q'} \left( 1 - i \varepsilon H(p, q) \right) \quad (84)$$

Ma per un'ev. infinitesima primo

$$q' = q + \varepsilon i \quad (85)$$

e dunque

$$\langle q' | S(t+\varepsilon, t) | q \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i p q + H(p, q) \varepsilon} \equiv S^\varepsilon(t) \quad (86)$$

Notare che  $p$  e  $q$  sono c-numeri.

Ora torniamo alla Eq. (86) e dividiamo l'intervallo  $t_1 - t_0 = \Delta t$  in  $N$  intervalli:  $\epsilon = \frac{\Delta t}{N}$  con  $N \rightarrow \infty$

$$\langle q' | S(t', t) | q \rangle = \int dq_1 \dots dq_{N-1} \langle q' | S(t', t_{N-1}) | q_{N-1} \rangle$$

$$\dots \langle q_1 | S(t_1, t) | q \rangle =$$

$$= \int dq_1 \frac{dp_1}{2\pi} \dots dq_{N-1} \frac{dp_{N-1}}{2\pi} e^{i p_{N-1} (q_{N-1} - q_{N-2}) \epsilon - i H(p_{N-1}, q_{N-1}) \epsilon}$$

$$\dots e^{i p_1 (q_1 - q_0) \epsilon - i H(p_1, q_1) \epsilon}$$

$$= \int \mathcal{D}p(\bar{t}) \mathcal{D}\bar{q}(\bar{t}) e^{\int_{\bar{t}}^{\bar{t}'} \left( p \dot{\bar{q}} - H(p, q) \right) d\bar{t}} \quad (87)$$

$$\bar{q}(\bar{t}') = q'$$

$$\bar{q}(\bar{t}) = q$$

dove  $\bar{t}$  e  $\bar{t}'$  sono stati assorbiti nella misura di integrazione. Notiamo ora che se la hamiltoniana è quadratica nelle  $p$  l'integrale su  $p$  nella Eq. (86) si può fare esplicitamente:

$$\langle q' | S(t', t) | q \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{i \left( p \dot{q} - \left( \frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \right) \epsilon} =$$

$$= e^{i \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) \epsilon} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{2m i \epsilon}} \sqrt{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} e^{i L(q, \dot{q}) \epsilon} = S^\epsilon(q) \quad (88)$$

Notiamo che la normalizzazione è corretta, infatti:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} S^\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{\frac{im}{2} \frac{\Delta q^2}{\epsilon}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} \quad (89)$$

$$M_q \int d\Delta q e^{\frac{im}{2} \frac{\Delta q^2}{\epsilon}} = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2\epsilon i}{m}} \quad (90)$$

dunque  $S^\epsilon(t)$  nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  è una gaussiana infinitamente stretta con normalizzazione fissata, e dunque

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} S^\epsilon(t) = \delta(\Delta q) = \langle q' | q \rangle \quad (91)$$

come deve essere.

Troviamo così la versione lagrangiana del PI

$$\langle q' | S(t', t) | q \rangle = \int_{\bar{q}(t)=q}^{i\sqrt{d}q L(q, \dot{q})} D\bar{q}(\bar{t}) e \quad (92)$$

$$\bar{q}(t') = q'$$

Utilizzando il path integral troviamo che l'ampiezza è data da

$$A_{\beta\alpha} = \int D\bar{q}(\bar{t}) \langle \alpha | q' \rangle e^{i\sqrt{d} \int \bar{t} L(\bar{q}, \dot{\bar{q}})} \langle q | \beta \rangle \quad (93)$$

dove notiamo che ora sulle  $q$  iniziali e finali si integra.

Notiamo infine che se ha qualunque set di stati nella Eq. (87) introduciamo un operatore abbiamo immediatamente che

$$\langle \beta | T(O_1(p, q; t_1) \dots O_n(p, q; t_n)) | \alpha \rangle = \int Dq(t) \langle \beta | q' \rangle \langle q | e^{i\sqrt{d} \int t L(q, \dot{q})} O(t_n) \dots O(t_1) | q \rangle \langle q | \alpha \rangle \quad (94)$$

dove i  $t$  sono stati ordinati cronologicamente nel membro di sinistra. /57

### 3.2 Il path integral e la rappresentazione in teoria dei campi

Possiamo generalizzare tutti i risultati trovati finora al caso della teoria dei campi considerando il campo  $\varphi_{\vec{x}}(t) = \varphi(\vec{x}, t)$  ed il suo canonicamente coniugato  $\pi_{\vec{x}}(t)$  come coordinate canoniche. Abbiamo dunque che

$$A_{\alpha} = \int D\varphi_1(\vec{x}; t_1) \int D\varphi_0(\vec{x}, t_0) \langle \beta(t_1) | \varphi_1(\vec{x}, t_1) \rangle \times \\ \langle \varphi_1(\vec{x}, t_1) | S(t_1, t_0) | \varphi_0(\vec{x}, t_0) \rangle \langle \varphi_0(\vec{x}, t_0) | \alpha(t_0) \rangle \quad (95)$$

$$\langle \varphi_1(\vec{x}, t_1) | S(t_1, t_0) | \varphi_0(\vec{x}, t_0) \rangle = \\ = \int_{\substack{\varphi(\vec{x}, t_0) = \varphi_0(\vec{x}, t_0) \\ \varphi(\vec{x}, t_1) = \varphi_1(\vec{x}, t_1)}} D\varphi(\vec{x}, t') D\pi(\vec{x}, t') \exp i \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x \left( \dot{\varphi}(\vec{x}, t') \pi(\vec{x}, t') - \mathcal{H}[\varphi, \pi] \right) \quad (96)$$

Notare che gli stati iniziali e finali sono dati da un insieme di stato

$$\langle \varphi(\vec{x}) | \alpha(t_0) \rangle = \Psi_{\alpha}[\varphi(\vec{x}, t_0)] \quad (97)$$

Notare anche che la notazione  $|\varphi(\vec{x}, t_0)\rangle$  va intesa come la generalizzazione al continuo di  $|\varphi_{\vec{x}}(t)\rangle = |q_i(t)\rangle$ ; notare che la dip. da  $t$  viene indicata nel settore di base in quanto il PI viene in seguito calcolato come ampiezza di transizione fra ~~due~~ stati di base  $|\varphi_0(t_0)\rangle$  e  $|\varphi_1(t_1)\rangle$ .

Notare anche che sui funzionali di stato l'operatore  $\pi$  agisce come derivata funzionale:

$$\langle \varphi(\vec{x}) | \pi(\vec{y}) | \Psi(t) \rangle = i \frac{\delta}{\delta \varphi(\vec{y})} \Psi[\varphi(\vec{x})] \quad (98) / 58$$

Ad esempio, un funzionale distribuito gaussiano ha la forma

$$\underline{Q}[\bar{\varphi}(\bar{x})] = N \exp - \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \varphi(\bar{x}) K(\bar{x}, \bar{y}) \varphi(\bar{y}) \quad (99)$$

dove il nucleo  $K$  può in generale essere un operatore differenziale. (\*)

A noi interessano calcoli espresse in cui gli stati  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  sono stati nello spazio di Fock: nella situazione più semplice stati a n particelle di debito impulso, o in situazioni più complicate (sta discutere ulteriormente) stati legati.

~~Il problema~~ In teoria dei qti il problema viene affrontato spesso in tre parti: 1) si ottiene un'espressione per il calcolo dell'ampiezza di transizione quando gli stati  $|\alpha\rangle$ ,  $|\beta\rangle$  sono lo stato fondamentale  $|0\rangle$  [Questo solleva la domanda (visto che  $|0\rangle$  era stato def. come lo stato a  $(0,0)$ ) della def. precisa di stato stato per la teoria in interazione]; il problema verrà affrontato esplicitamente più avanti; 2) si ottiene un'espressione per il calcolo di valori medi del prodotto cronologico di qti di campo tra tali stati; 3) si esprimono le ampiezze in termini di tali valori medi. Il calcolo di ~~queste due espressioni~~ ampiezze e così ridotto al calcolo di questi valori medi. Questo può essere fatto in modo particolarmente efficiente usando il path integral.

Disattino ora i primi due punti.

Osserviamo innanzitutto che lo stesso argomento che abbiamo usato nella MQ si dice immediatamente che

$$\int D\varphi(\bar{x}, t) D\pi(\bar{x}, t) \exp i \int_{t_0}^{t_1} (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}) d^3x \varphi(\bar{x}, t_2) \dots \varphi(\bar{x}, t_n) =$$

$$= \langle \varphi_1(\bar{x}, t_1) | S(t_1, t_2) \hat{\varphi}(\bar{x}, t_2) | \varphi(\bar{x}, t_2) \rangle \langle \varphi(\bar{x}, t_2) | S(t_2, \dots) \hat{\varphi}(\bar{x}, t_n) | \varphi(\bar{x}, t_n) \rangle \dots \langle \varphi(\bar{x}, t_n) | \dots | \varphi_0(\bar{x}, t_0) \rangle$$

$$= \langle \varphi(\bar{x}, t_n) | T \left( \varphi(\bar{x}, t_1) \dots \varphi(\bar{x}, t_n) \right) | \varphi(\bar{x}, t_0) \rangle \quad (100)$$

Notiamo che in formalismo hamiltoniano questo è ovvio per via dell'ordinamento naturale dei tempi: il PT è stato ottenuto sperando l'ev. temporale finita in  $N \rightarrow \infty$  ev. temp. infinitesime. Questo espone la causalità del formalismo hamiltoniano. In versione lagrangiana il risultato è nascosto dal probl. canonico. (\*)

Osserviamo quindi che si dimostra che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int D\varphi D\pi \exp i \int dt \int d^3x \left( \dot{\varphi} \pi - \mathcal{H} + i \varepsilon \varphi^2 \right) \varphi_1 \dots \varphi_n =$$

$$= \langle 0 | T [\varphi(t_1) \dots \varphi(t_n)] | 0 \rangle \quad (101)$$

dove  $|0\rangle$  è lo stato fondamentale (da definire con maggiore precisione nel seguito per quanto riguarda la teoria interagente).

In versione lagrangiana abbiamo quindi

$$\langle 0 | T [\varphi_{x_1}(t_1) \dots \varphi_{x_n}(t_n)] | 0 \rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int D\varphi \exp i \int_0^1 dx \left( \dot{\varphi}^2 + i \varepsilon \varphi^2 \right) \quad (102)$$

dove  $x_i = (t_i, \bar{x}_i)$ . Questa è detta funzione di Green

a  $n$  punti. Nota che a causa del fatto di convergenza non è necessario assegnare le condizioni al contorno.

Il fatto che la convergenza viene talvolta spiegato come monotono che estrae lo stato fondamentale. Ciò è circa giusto, ma in realtà il risultato si dimostra semplicemente includendo lo stato fondamentale nell'integrale funzionale. Questo dimostra (\*\*)

### 6.3 Le funzioni di Green

Siamo in particolare interessati al calcolo del contributo  
connesso alle funzioni di Green, ossia

$$G(x_1 \dots x_n) = \frac{\langle 0 | T (\psi(x_1) \dots \psi(x_n)) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \quad (103)$$

ovvero la divisione per  $\langle 0 | 0 \rangle$  rimuove contributi corrispondenti  
a fluttuazioni del vuoto che, come vedremo in seguito,  
corrispondono a contributi casualmente ammessi.

Un metodo molto efficiente per calcolare questi contributi  
in teoria dei campi è di aggiungere alla lagrangiana un termine  
di sorgente:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \eta(x) \psi(x) \quad (104)$$

sicché

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} + \int d^4x \eta(x) \psi(x) \quad (105)$$

Si ha così

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[\eta]} \frac{\delta^n Z[\eta]}{\delta \eta(x_1) \dots \delta \eta(x_n)} \Big|_{\eta=0} \quad (106)$$

dove

$$Z[\eta] = \int D\psi e^{i(\mathcal{S} + \int d^4x \eta \psi)} \quad (107)$$

è il funzionale generatore delle funzioni di Green.

La potenza del metodo funzionale è che:

- $Z[\eta]$  per la teoria libera è calcolabile in  
forma chiusa

- Il PI genera uno sviluppo perturbativo per  $Z[\eta]$

e dunque per le  $G_n$

Dimostriamo questo per un campo scalare, procedendo poi al  
caso di campi di spin più elevato

Calcoliamo  $Z[F; \mathbb{I}]$  per la teoria libera

$$Z_0[F; \mathbb{I}] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp i \left( \int d^4x \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2 + i\varepsilon \varphi^2 \right) \right) \quad (108)$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi \exp iS$$

Abbiamo così

$$S = - \int d^4x \frac{1}{2} \varphi (\Box + m^2 - i\varepsilon) \varphi + \int i \varphi d^4x$$

$$= - \frac{1}{2} \langle \varphi | A | \varphi \rangle + \langle j | \varphi \rangle \quad (109)$$

con  $A = \Box + m^2 - i\varepsilon$  (110)

Note che  $A^\dagger = A$  nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (111)

$$A |k\rangle = (-k^2 + m^2 - i\varepsilon) |k\rangle \quad (112)$$

dove  $\langle x | k \rangle = \exp -ikx$  (113)

ossia

$$\langle x | \varphi \rangle = \frac{\int d^4k}{(2\pi)^4} \langle x | k \rangle \langle k | \varphi \rangle$$

$$= \frac{\int d^4k}{(2\pi)^4} \varphi(k) e^{-ikx} \quad (114)$$

Note che la transf. di Fourier  $\varphi \leftrightarrow \varphi$  perde nel PT

tutte le configurazioni di campo contribuiscono, e non solo le soluzioni delle eq. classiche del moto.

Esplícitamente possiamo verificare che la azione si diagonalizza nella base delle  $|u\rangle$ :

$$S = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \varphi^*(k) (k^2 - m^2 + i\varepsilon) \varphi(k) + j^*(k) \varphi(k) \quad (115)$$

Notiamo anche che

$$\varphi(-k) = \varphi^*(k); \quad j(k) = j^*(k) \quad (116)$$

$$\text{e che} \quad \langle j | \varphi \rangle = \langle \varphi | j \rangle \quad (117)$$

L'integrale può essere quindi visto come un integrale gaussiano, che possiamo calcolare prendendo

$$|x\rangle = |\varphi\rangle - A^{-1} |j\rangle \quad (118)$$

Sostituendo l'hermiticità di  $A$  abbiamo immediatamente

$$-\frac{1}{2} \langle x | A | x \rangle = \frac{1}{2} \langle \varphi | A | \varphi \rangle + \langle j | \varphi \rangle - \frac{1}{2} \langle j | A^{-1} | j \rangle \quad (119)$$

da cui segue immediatamente

$$Z_0[j] = \int D\varphi \exp \left[ \frac{i}{2} \langle x | A | x \rangle + \frac{i}{2} \langle j | A^{-1} | j \rangle \right] \quad (120)$$

$$= \exp \frac{i}{2} \langle j | A^{-1} | j \rangle Z_0[0] \quad (121)$$

Ora possiamo calcolare

$$A^{-1} = \frac{1}{-k^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (122)$$

e dunque

$$Z_0[f; J] = \exp - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} j^*(k) \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} j(k) Z_0[0] \quad (123)$$

Inoltre

$$Z_0[0] = \int D\phi \exp - \frac{i}{2} \langle \phi | A | \phi \rangle \quad (124)$$

Ma notiamo che

$$\int d\phi \exp - \frac{i}{2} \lambda \phi^2 = \sqrt{\frac{2\pi}{i\lambda}} \quad (125)$$

Dunque se  $A$  è una matrice reale  $N$  autovalori  $\lambda_i$

$$Z_0[0] = (-2\pi i)^{N/2} \frac{1}{\sqrt{\text{Det } A}} \quad (126)$$

Assieme a tutti nella nostra abbiamo così

$$Z_0[f; J] = \left[ \exp - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} j^*(k) \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} j(k) \right] \frac{1}{\sqrt{\text{Det}(0 + m^2)}} \quad (127)$$

Questa è la forma chiusa per la  $Z[f; J]$  per la teoria libera.

Passando ora alla  $Z[f; J]$  generica, notiamo le seguenti identità.

Prima di tutto, ricordiamo che

$$\int D\phi \phi^m(x) e^{iS} = (-i)^m \frac{\delta^m}{\delta J^m(x)} \int D\phi e^{i(S + \int d^4 x J(x)\phi)} \quad (128)$$

Ora notiamo che

$$Z = \int D\phi e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_0[\phi] + \int d^4 x J(x)\phi}$$

$$= \int D\varphi \ e^{i\sqrt{d^4_x} Z_0(\varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi^n$$

$$= \int D\varphi \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\delta^n}{\delta j^n} e^{i\sqrt{d^4_x} Z_0(\varphi)} \Big|_{j=0}$$

$$= \int D\varphi \ e^{i\sqrt{d^4_x} V[\frac{\delta}{\delta j}]} e^{i\sqrt{d^4_x} Z_0 + j\varphi} \Big|_{j=0}$$

$$= e^{i\sqrt{d^4_x} V[\frac{\delta}{\delta j}]} Z_0[j] \Big|_{j=0} \quad (129)$$

La (129) permette di calcolare il funzionale generatore in presenza di potenziale generato come una serie perturbativa in termini del potenziale generatore, a partire dalla quale la funzione di Green può essere a sua volta calcolata.

### 3.3 Il propagatore

E' chiaro che l'operatore cinetico  $A = \square + m^2 - i\varepsilon$  ed il suo inverso hanno in modo fondamentale in quanto contengono l'informazione dinamica sulla teoria libera (Eq. (126)) nonché il "building block" per costruire lo sviluppo perturbativo delle funzioni di Green (Eq. (129)).

Ne studiamo ora le proprietà.

Notiamo innanzitutto che

$$\begin{aligned} \langle \varphi | A | \varphi \rangle &= \int d^4x \varphi(x) (\square + m^2 - i\varepsilon) \varphi(x) = \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \varphi^*(k) (k^2 - m^2 + i\varepsilon) \varphi(k) \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \langle j | A^{-1} | j \rangle &= \int d^4x j(x) \frac{1}{\square + m^2 - i\varepsilon} j(x) \\ &= - \int d^4k j^*(k) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} j(k) \end{aligned} \quad (131)$$

Notiamo inoltre che nello spazio delle posizioni  $A$  e il suo inverso sono operatori bi-locali. Infatti si ha

$$\langle \varphi | A | \varphi \rangle = \int d^4x d^4y \varphi(x) \langle x | A | y \rangle \varphi(y) \quad (132)$$

$$\langle j | A^{-1} | j \rangle = \int d^4x d^4y j(x) \langle x | A^{-1} | y \rangle j(y) \quad (133)$$

Ma

$$\begin{aligned} \langle x | A | y \rangle &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle x | k \rangle \langle k | A | k \rangle \langle k | y \rangle \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(y-x)} (k^2 - m^2 + i\varepsilon) \end{aligned} \quad (134)$$

Notiamo dunque che il funzionale generatore è dato da

$$\begin{aligned} Z[j] &= Z[0] \exp \frac{i}{2} \langle j | A^{-1} | j \rangle \\ &= Z[0] \exp -\frac{1}{2} \langle j | -i A^{-1} | j \rangle \\ &= Z[0] \exp -\frac{1}{2} \int d^4x \, j(x) \langle x | -i A^{-1} | y \rangle j(y) \quad (135) \end{aligned}$$

La quantità

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &\equiv \langle x | -i A^{-1} | y \rangle = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(y-x)} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (136) \end{aligned}$$

è detta propagatore di Feynman.

Si tratta evidentemente della funzione di Green per l'operatore cinetico:

$$\begin{aligned} (\Box + m^2 - i\varepsilon) D_F(x-y) &= -i \langle y | A A^{-1} | y \rangle = \\ &= -i \delta^{(4)}(x-y) \quad (137) \end{aligned}$$

In termini di funzioni di Green, si tratta della funzione a due punti. Infatti, nella teoria libera

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = - \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} \Big|_{j=0} =$$

$$= Z[0] \frac{\delta}{\delta j(x)} \int d^4z \langle z | -i A^{-1} | z \rangle j(z) \exp -\frac{1}{2} \langle j | -i A^{-1} | j \rangle$$

$$= 2i0] \langle \gamma | -iA^{-1}(x) \rangle$$

$$= 2i0] D_F(x-\gamma) \quad (138)$$

in quanto manifestamente se  $j=0$  il contributo di doppia derivata dell'esponenziale si annulla.

È interessante calcolare il propagatore a partire dalla funzione a due punti con metodo operatoriale (hamiltoniano) in quanto questo illustra le proprietà causali del propagatore che sono sempre più trasparenti in versione hamiltoniana.

Ricordando lo sviluppo dell'operatore di campo

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega}} (a_k \exp(-ikx) + a_k^\dagger \exp(ikx)) \quad (139)$$

in termini di operatori di creazione e distruzione

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (140)$$

abbiamo

$$D_F(x-\gamma) = i \langle 0 | T \varphi(x) \varphi(\gamma) | 0 \rangle =$$

$$= \frac{i}{\langle 0 | 0 \rangle} \langle 0 | \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega 2\omega'}} a_k e^{-ikx} a_{k'}^\dagger e^{ik'\gamma} | 0 \rangle \Theta(t_x - t_\gamma) + x \leftrightarrow \gamma$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left( e^{-ik(x-\gamma)} \Theta(t_x - t_\gamma) + e^{-ik(\gamma-x)} \Theta(t_\gamma - t_x) \right)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-\gamma)} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (141)$$

In fatti l'integrale in  $k_0$  può essere fatto col

metodo dei residui. L'integranda ha singolarità in  
 $k_0^2 - m^2 + i\varepsilon = 0$  (142)

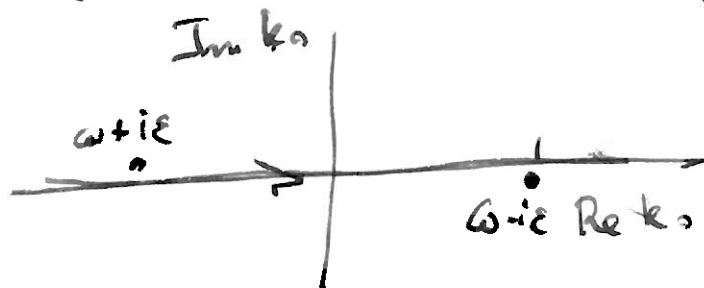
ossia

$$k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2 - i\varepsilon$$

$$k_0 = \frac{\pm \sqrt{k^2 + m^2} \mp i\varepsilon}{\pm i\varepsilon} = \pm(\omega - i\varepsilon)$$

dove nell'ultima passo abbiamo posto  $\sqrt{k^2 + m^2 - i\varepsilon} =$

$$\sqrt{k^2 + m^2 - i\varepsilon} = \sqrt{k^2 + m^2} - \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{k^2 + m^2}} = \sqrt{k^2 + m^2} - i\varepsilon$$



Quindi se  $t_x > t_y$  possiamo chiudere nel semipiano inferiore  
 e viceversa. Si ha così

$$t_x > t_y \quad e \quad \frac{-i\omega(t_x - t_y)}{(-2\pi i) \frac{i}{2\pi} \frac{1}{2\omega}} \quad (145)$$

$$t_y > t_x \quad e \quad \frac{-i\omega(t_y - t_x)}{(2\pi i) \frac{i}{2\pi} \left(-\frac{1}{2\omega}\right)} \quad (146)$$

dove abbiamo posto  $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$  (147)

$$\frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{(k_0 - \omega)(k_0 + \omega)}$$

$$e \quad \lim_{k_0 \rightarrow \pm \omega} \frac{k_0 \pm \omega}{k^2 - m^2} = \pm \frac{1}{2\omega} \quad (148)$$

Notiamo dunque che la prescrizione di Feynman "nessa ritardata  
 e nessuna anticipata" riflette la causalità (il prodotto  
 canonico) del PI e' automaticamente implementato.

Calcoliamo infine il propagatore per un campo di spin zero e  $m=0$

In tal caso il termine cinetico ha la forma

$$S = \int d^4x \quad -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} :$$

(57')

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \quad A_{\mu} (\partial_{\mu} \partial^{\nu} - \eta^{\mu\nu} \partial^2) A_{\nu} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_{\mu}(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^{\mu} k^{\nu}) A_{\nu}(k)$$

E' chiaro che  $-k^{\mu} g^{\mu\nu} + k^{\mu} k^{\nu}$  non e' invertibile in quanto e' ortogonale a  $k_{\mu}$ . Questo corrisponde al fatto

71

che solo i gradi di liberta' originali  $A_{\mu}$  sono eccitazioni fisiche (e quindi si propagano). ~~Ma~~

La soluzione del problema, che non venga distrutta per ore, e' di introdurre un vincolo che lascia solo i gradi di liberta' fisici vengano quantizzati. Si trova cosu'

$$Z[J] = \exp \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \quad J_{\mu}(x) D^{\mu\nu}(x-y) J_{\nu}(y) \quad (57'')$$

$$D^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{(-i)}{k^2 + i\epsilon} g^{\mu\nu} \quad (57''')$$

(notare il segno - : i gradi di liberta' fisici sono spaziali)

72

### 3.4 Il path integral per i fermioni

L'integrale funzionale realizza la quantizzazione integrando sui cammini seguiti da variabili c-numero; l'operazione di media associata riproduce il corretto formalismo in termini di operatori non-commutanti.

Per i fermioni è necessario quindi definire dei c-numeri anticommutanti, e derivazione ed integrazione su di essi.

Definiamo quindi le variabili di Grassmann, che soddisfano

$$\theta \eta = -\eta \theta \quad (52)$$

e quindi

$$\theta^2 = 0 \quad (53)$$

Ne segue che uno sviluppo di Taylor si ferma sempre al primo ordine

$$f(\theta) = A + B\theta \quad (54)$$

Naturalmente

$$\frac{d\theta}{d\theta} = 1 \quad (55)$$

e quindi

$$\frac{df}{d\theta} = B \quad (56)$$

~~Ma~~ La più difficile è la definizione dell'integrazione.

Notiamo che a noi serve esclusivamente sapere eseguire integrali su tutto il dominio analoghi all'integrale definito  $\int_{-\infty}^{\infty} dx$ .

L'integrale non può essere definito come l'inverso della derivata,

visto che  $\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) = 0$ , quindi se fosse  $I = D^{-1}$  allora  $IDB = \frac{d}{d\theta} B = 0$  che è-

L'integrazione è definita dalle due seguenti proprietà: una calcolabile

1) L'integrale

$$I = \int d\theta (A + B\theta) \quad (52)$$

deve essere una funzione lineare di  $A$  e  $B$ .

2) L'integrale deve essere invariante sotto traslazioni della variabile di integrazione

$$\int d\theta (A + B\theta) = \int d\theta (A + B(\eta + \theta)) = \quad (53)$$

l'unica funzione che condiziona (53) è la costante che moltiplica  $B$  pari a zero: quindi il risultato deve essere proporzionale a  $B$ . Il coeff. di proporzionalità è convenzionalmente scelto pari ad uno:  $\int d\theta (A + B\theta) = B \quad (59)$

Ne segue quindi che

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{d}{d\theta} f(\theta) \quad (60)$$

Conviene infine definire l'operazione di coniugazione complessa di un prodotto come

$$(\theta\eta)^* = \eta^* \theta^* = -\theta^* \eta^* \quad (61)$$

L'integrale su numeri di Grassmann complessi si esegua prendendo

$$\theta = \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}} ; \theta^* = \frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}} \quad (62)$$

riche-  
e  $\theta, \theta^*$  possono scegliere anche essere trattati come numeri di Grassmann  
indipendenti.  $d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{i} d\theta^* d\theta$  nota che dipende dall'ordine!  
 $d\theta^* d\theta = -d\theta d\theta^*$

Possiamo ora calcolare un integrale gaussiano:

$$\int d\theta d\theta^* e^{-\theta^* b \theta} = \int d\theta d\theta^* (1 - \theta^* b \theta) =$$

$$= b \int d\theta^* d\theta \theta \theta^* = b \quad (63)$$

Notiamo che se questo fosse un integrale gaussiano ordinario il risultato sarebbe  $\frac{2\pi}{b}$ . A parte il fattore  $2\pi$ , la differenza è che  $b$  è al numeratore anziché al denominatore.

Notiamo che

$$\int d\theta^* d\theta \theta \theta^* e^{-\theta^* b \theta} = 1 = \frac{1}{b} \quad (64)$$

quindi un extra fattore  $\theta \theta^*$  nell'integrando produce un extra  $\frac{1}{b}$  nell'integrale, proprio come in un integrale gaussiano ordinario.

Notiamo ora che una trasformazione unitaria delle coordinate di Grassmann lascia invariata l'integrale di integrazione. Infatti si ha, se

$$\theta'_i = U_{ij} \theta_j \quad (65)$$

$$\prod_i \theta'_i = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \theta'_{i_1} \dots \theta'_{i_n}$$

$$= \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} U_{i_1 j_1} \dots U_{i_n j_n} \theta_{j_1} \dots \theta_{j_n}$$

$$= \det U \prod_i \theta_i$$

Ma se

$$I = \prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i f(\theta) \quad (66)$$

come si è visto l'unica termine che non integra a zero è quello che contiene un'unica potenza di  $\theta_i$  e  $\theta_i^*$ .

Ne segue che

$$I = \pi_i \int d\theta_i^* d\theta_i^* e^{(\theta^*)^T U \theta} \det U \det U^* \quad (67)$$

Ma possiamo quindi eseguire un integrale gaussiano per le variabili  $\theta_i$  e  $\theta_i^*$  (per la matrice  $U$  invertibile)  $\det U \det U^* = 1$

$$I = \pi_i \int d\theta_i^* d\theta_i^* e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} = \pi_i \int d\theta_i^* d\theta_i^* e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} \quad (68)$$

Inoltre per una matrice unitaria  $(\det U = 1)$

scegliendo  $\theta_i$  come gli autovettori di  $B$ , con autovalori  $b_i$ :

$$I = \pi_i \prod_i b_i = \det B \quad (69)$$

Analogamente

$$\pi_i \int d\theta_i^* d\theta_i^* \theta_k \theta_k^* e^{-\theta_i^* B_{ij} \theta_j} = \det B B^{-1}_{kk} \quad (70)$$

da cui lo stesso risultato che si troverebbe in un integrale gaussiano ordinario, eccetto che il determinante è al denominatore.

Possiamo ora definire il path-integral in termini come l'integrale di Grassmann

$$Z[J, \bar{J}] = \int D\bar{\psi} D\psi \exp i \left[ \int d^4x \bar{\psi} (i\partial - m + i\epsilon) \psi + \int d^4x (\bar{J}\psi + \bar{\psi}J) \right] \quad (71)$$

Poiché da un lato l'integrale gaussiano si comporta al modo solito sotto traslazioni della variabile d'integrazione, ma d'altro canto esso produce un determinante al numeratore, abbiamo

$$Z[J, \bar{J}] = \det[i\partial - m + i\epsilon] \exp i \int d^4x \bar{J} (i\partial - m + i\epsilon)^{-1} J \quad (72)$$

Nota:  $A = -i(i\partial - m + i\epsilon)$   $A^{-1} = \frac{1}{K - m + i\epsilon}$

Come nel caso del campo scalare, risolviamo il risultato in vari modi

$$Z_0[j] = \text{Det } A \exp \langle j | A^{-1} | j \rangle$$

$$A^{-1} = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \Leftrightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

$$\langle j | A^{-1} | j \rangle = \int d^4x \bar{j}(x) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} j(x)$$

$$= \sqrt{\frac{1^4}{(2\pi)^4}} \bar{j}(p) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} j(p)$$

con

$$j(x) = \int d^4p e^{-ipx} j(p)$$

$$= \int d^4x d^4y \bar{j}(x) \delta(x-y) j(y)$$

$$\delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

Notare che

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2$$

quindi

$$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Possiamo quindi calcolare f. di ~~transizione~~ <sup>green</sup> come

$$\frac{\langle 0 | T(\psi_1 \dots \psi_n) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} = \frac{1}{Z[0]} \frac{(i)^n \delta^n}{\delta j_1 \dots \delta j_n} Z[j]$$

10/5

$$\Pi: \int d\theta_i^* d\theta_i \delta_a \theta_b^* e^{-\theta_n^* B_{nm} \theta_m}$$

Supponiamo dapprima  $B_{nm}$  diagonale. In tal caso

$$= \Pi_i \int d\theta_i^* d\theta_i \delta_a \theta_b^* \left( 1 - \theta_n^* b_n \delta_{nn} \theta_n \right)$$

se  $a=b$   $= \prod_{i \neq a} \Pi_i b_i$  (l'a-esimo integrale = 1)

se  $a \neq b$   $= 0$  (non c'è alcuna linea lineare sia in  $\theta$  che in  $\theta^*$ )

$$= B_{ab}^{-1} \det B$$

Se  $B_{nm}$  non è diagonale

$$\theta_i^* b_j; \theta_i;$$

esempio

$$\begin{aligned} \theta_i b_j; \theta_i \\ \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1 &= \\ &= \theta_1 \theta_2 - \theta_2 \theta_1 \end{aligned}$$

$$= \Pi: \int d\theta_i^* d\theta_i U_{aa'} \theta_{a'}^* \delta_{b'b} U_{b'b}^{-1} \left( 1 - \theta_n^* U_{nn'}^{-1} B_{n'm'} U_{m'm} \theta_{m'} \right) =$$

$$= U_{aa'} B_{b'a'}^{-1} U_{b'b}^{-1} \det B \text{ ma } U \text{ è ortogonale (B è antisimmetrica)}_{\text{antisimmetrica}}$$

$$= (U B^{-1} U^{-1})_{ab} \det B = B_{ab}^{-1} \det B$$

visto che  $B' = U^{-1} B U$ ,  $B = U B' U^{-1}$ ;  $B^{-1} = U B'^{-1} U^{-1}$

La funzione a due punti particolare è data da

$$\langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{\delta^2}{\delta \bar{j}(x) \delta j(y)} \quad \text{e} \quad Z = \delta_F(x-y) \quad (82)$$

Questo è lo stesso risultato che si ottiene con il metodo hamiltoniano.  
Una osservazione importante è che la nostra anticommutazione dei campi spinoriali implica che

$$T \psi(x) \psi(y) = \begin{cases} \psi(x) \psi(y) & \text{se } t_y < t_x \\ -\psi(y) \psi(x) & \text{se } t_x < t_y \end{cases} \quad (83)$$

\* Nota che

$$\begin{aligned} & \int D\bar{\psi} D\psi \quad \psi \exp i \int d^4x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi + \bar{j} \psi + \bar{\psi} j \\ & = + \frac{\delta}{\delta j} Z[j, \bar{j}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mentre} \quad & \int D\bar{\psi} D\psi \quad \bar{\psi} \exp i \int d^4x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi + \bar{j} \psi + \bar{\psi} j \\ & = - \frac{\delta}{\delta \bar{j}} Z[j, \bar{j}] \end{aligned}$$

perché

$$\frac{\delta}{\delta j} \int \bar{\psi} i d^4x = - \bar{\psi}$$

Nota inoltre che dalla eq. (83) segue che

$$T(\psi \bar{\psi}) = - T(\bar{\psi} \psi)$$

coincidente con il fatto che  $\frac{\delta^2}{\delta j \delta \bar{j}} = - \frac{\delta^2}{\delta \bar{j} \delta j}$  %

## IV Calcolo di ampiezze

### 4.1 La formula di riduzione

La formula di riduzione esprime un risultato fondamentale della teoria dei campi, ossia il fatto che una funzione di Green ha una singolarità di tipo polo su ogni volta che ciascuna delle particelle esterne può andare on-shell. Questo vuol dire che se definiamo

$$G(p_1 \dots p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{-ip_1 x_1} \dots e^{-ip_n x_n} \langle 0 | T \phi_1(x_1) \dots \phi_n(x_n) | 0 \rangle \quad (1)$$

e vediamo che  $G$  come funzione di  $p_1 \dots p_n$  complessi; se  $p_i^2 = m_i^2$  corrisponde ad una particella fisica (la  $i$ -esima di Green ha una singolarità, e in particolare una singolarità  $e^-$ , a meno di opportuni coefficienti, il residuo al polo è multiplo, nel senso che  $\langle p_1 \dots p_n | k_1 \dots k_n \rangle$  è il residuo  $\mathcal{P}$  del polo della  $G(p_1 \dots k_n)$  quando tutti gli impulsi vanno on-shell.

Il risultato si estende anche al caso di stati legati. Ad esempio se esiste un operatore  $O[\phi]$  tale che

$$\langle 0 | O[\phi] | p \rangle \neq 0 \quad (2)$$

dove  $|p\rangle$  è uno stato ad una particella, ed  $O$  è un'operatore a funzione di più op. di campo, allora una h. di Green con l'op.  $O$  sarà non zero quando  $p$  va on-shell.

Dimostriamo il risultato quando le particelle entranti e uscenti corrispondono a campi fondamentali della teoria.

Il primo passo è definire un'operazione di creazione per uno stato col una particella reale quando la teoria è in interazione. A tal fine definiamo il transitorio

$$W(f(\vec{x}, t), g(\vec{x}, t)) \equiv \int d^3x f \frac{d}{dt} g - \left( \frac{d}{dt} f \right) g \quad (3)$$

Notare che  $f$  e  $g$  potrebbero essere operatori quindi rispettivamente l'anticommutatore.

Il transitorio definisce un prodotto scalare tra funzioni rispetto al quale le sol. delle eq. del moto della linea

$$i \frac{d}{dt} |f\rangle_{\omega(\vec{k})} = \omega(\vec{k}) |f\rangle_{\omega(\vec{k})} \quad (4)$$

formano una base completa.

Ad esempio per il campo scalare, scegliendo

$$f_{\vec{k}} = \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \quad (5)$$

$$W(f_{\vec{k}}^*, f_{\vec{k}'}) = \int d^3x \frac{e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega 2\omega'}} e^{(-i)(\omega' + \omega)t}$$

$$= -i \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (6)$$

Definiamo quindi degli operatori di creazione e distruzione

$$a_{\vec{k}}(t) \equiv i W \left( \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2\omega}}, \phi(x) \right) \quad (7)$$

ossia i coefficienti (dip da  $t$ , nel caso in interazione) dello sviluppo del campo rispetto a questa base di funzioni.

La loro espressione esplicita è ovviamente  
 $i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \varphi(\vec{x}, t) = i k x$

$$a(\vec{k}) = \frac{i \int d^3 x}{\sqrt{2\omega}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \text{e} \quad \varphi(\vec{x}, t) = \int d^3 k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (8)$$

È facile verificare che

$$\varphi(\vec{x}) = \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left( e^{-i k x} a(t) + e^{i k x} a^\dagger(t) \right) \quad (9)$$

per sostituzione diretta. Notare che ciò è vero qualunque sia la dip. da  $t$  scegli  $a(t)$ .

Questo in particolare implica che se  $[ \pi, \varphi ] = -i \delta$

allora  $[a, a^\dagger] = \delta$  a ogni uguale.

Nella teoria libera ovviamente gli  $a$  non dipendono dal tempo. In questo senso gli  $a$  ricordano la rapp. di interazione (anche se  $\varphi$  è un campo alla Heisenberg).

La proprietà fondamentale degli operatori  $a, a^\dagger$  è

$$\frac{d}{dt} a(t) = i [V, a(t)] \quad (10)$$

$$\text{se} \quad H = H_0 + V \quad (11)$$

prop. come in rapp. di interazione.

$$H = H_0 + V \quad (7)$$

La Eq. (6) si dimostra utilizzando l'eq. di Heisenberg

$$\begin{aligned} \frac{da_{\vec{k}}}{dt} &= \frac{\partial a_{\vec{k}}}{\partial t} + i [H, a_{\vec{k}}] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} i \omega \left[ \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2\omega}}, \alpha(\vec{x}, t) \right] \\ &\quad + i [H_0 + V, a_{\vec{k}}] \end{aligned} \quad (12) \quad (81)$$

Ora notiamo che la definizione di  $a$  in termini di  $\psi$  non implica che

$$H_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \quad (13) \quad (82)$$

Questo, insieme al fatto che  $a, a^\dagger$  commutano canoniche a tempi uguali (Eq. (5)) implica

$$i [H_0, a_{\vec{k}}] = -i \omega_k a_{\vec{k}} \quad (14)$$

e dunque la Eq. (8) diventa

$$\frac{da_{\vec{k}}}{dt} = i \omega_k a_{\vec{k}} - i \omega_k a_{\vec{k}} + i [V, a_{\vec{k}}] \quad (15)$$

QED. Definiamo dunque ora

$$\begin{aligned} a_{in} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} a(t) \\ a_{out} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) \end{aligned} \quad (16)$$

e conseguentemente

$$a_{in}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{in} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} a_{out}^\dagger \right) \quad (17)$$

e analogamente per ant.

E' importante notare che  $a_{in}, a_{out}$  non dipendono esplicitamente da  $t$ , visto che sono definiti come in  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty}$ , però sono implicitamente funzione del corpo  $t$  e tutti i tempi: al solito si può esprimere il corpo  $\phi$  come il corpo cin più un termine di sorgente, ovvero come

$$\phi(x) = \phi_{in}(x) + \int d^4y G_R(x-y) X(\phi(y)) \quad (18)$$

dove  $X(\phi)$  è essenzialmente il cubitolo  $[V, \phi]$ .

Ora, sfruttando questa espressione, si dimostra che

$$[P_\mu, \phi_{in}] = -i\partial_\mu \phi_{in} \quad (19)$$

da cui segue che

$$P_\mu a_{in}^\dagger |0\rangle = P_\mu a_{in}^\dagger |0\rangle \quad (20)$$

e analogamente per ant. In altri termini,  $a_{in}^\dagger, a_{in}$  sono buoni operatori di creazione e distruzione per stati entranti e usanti (rispetto alla hamiltoniana completa).

Possiamo dunque usare questi operatori per scrivere qualunque stato di indice  $S$ :

$$S_S = \langle k_1 \dots k_n | P_1 \dots P_n \rangle$$

$$= \sqrt{2\omega_1} \dots \sqrt{2\omega_n} \langle 0 | a_{out}(k_1) \dots a_{in}^\dagger(p_1) \dots | 0 \rangle \quad (21)$$

notare che l'ev. temp. è contenuta

Traccia di  $\phi_{in}$  delle proprietà di  $a_{in, out}$   
e analogamente per  $a_{out}$ .

Osserviamo che  $a_{in}, a_{out}$  non dipendono da  $t$ , ma dipendono dal corpo  $\varphi$  a tutti i tempi  $t$ .

Il punto cruciale è che il corpo  $\phi_{in}$  (e  $\phi_{out}$ ) soddisfa le relazioni di commutazione canoniche

$$[P_\mu, \phi_{in}] = -i \partial_\mu \phi_{in} \quad (18)$$

e la sua definizione Eq. (17) implica quindi che  $a_{in}^\dagger$  crea un antostato del quartri-impulso. Notare che la Eq. (14) e non-banale perché, appunto,  $a_{in}$  nella (13) dipende da  $\varphi$  a tutti i tempi, e quindi la Eq. (14) non è conseguenza diretta delle relazioni di commutazione a tempi uguali.

Diamo una traccia di dimostrazione della Eq. (18) senza fare i dettagli dei passaggi intermedi.

Immediatamente notiamo che la Eq. (16) è manifestamente equivalente all'eq. integrale

$$a(t) = a_{in} + \int_{-\infty}^t dt \, i [V, a(t-)] \quad (19)$$

$$= a_{in} + \int_{-\infty}^t dt \, i [V, \mathcal{U}(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\omega}}, \varphi)] \quad (20)$$

Il commutatore nella (20) può essere calcolato usando rel. di commutazione canoniche:

$$[V, \mathcal{U}(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\omega}}, \varphi)] = \int \frac{\chi F(\varphi)}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} e^{ikx} d^3x \quad (21)$$

Careful check (Inversione della formula di Krasinski)

Define  $a_k(t) \equiv i \sqrt{\frac{d^3 x}{2\omega}} e^{i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \varphi(\vec{x}, t)$

$$= i \sqrt{\frac{d^3 x}{2\omega}} e^{i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})} (\dot{\varphi} - i\omega \varphi)$$

$$\Rightarrow a_k^\dagger(t) \equiv -i \sqrt{\frac{d^3 x}{2\omega}} e^{-i(\omega t - \vec{x} \cdot \vec{k})} (\dot{\varphi} + i\omega \varphi)$$

where we used the fact that  $\varphi = \varphi^*$

It follows that

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{d^3 k}{2\omega(2\pi)^3}} \left( e^{-ikx} a_k(t) + e^{ikx} a_k^\dagger(t) \right)$$

Check  $\varphi(x) = \sqrt{\frac{d^3 k}{2\omega(2\pi)^3}} e^{-ikx} \left( i \sqrt{\frac{d^3 \tilde{x}}{2\omega}} e^{i(\omega t - \tilde{x} \cdot \tilde{k})} (\dot{\varphi}(t, \tilde{x}) - i\omega \varphi) \right)$

$$+ e^{ikx} \left( -i \sqrt{\frac{d^3 \tilde{y}}{2\omega}} e^{-i(\omega t - \tilde{y} \cdot \tilde{k})} (\dot{\varphi}(t, \tilde{y}) + i\omega \varphi) \right)$$

$$= \sqrt{\frac{d^3 \tilde{y}}{2\omega}} \left[ i (\dot{\varphi} - i\omega \varphi) - i (\dot{\varphi} + i\omega \varphi) \right] \sqrt{\frac{d^3 k}{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \tilde{y})}$$

$$= \varphi(x)$$

nella def. degli stati, come è consueto in coppia di Heisenberg (lo stato  $|f\rangle$  è antostato di un op. al tempo  $t_f$  che è dato da  $S^{-1} \phi S$  volta l'op. al tempo  $i$ , e quindi  $S^{-1} \psi(t_f) = S^{-1} |f(t_i)\rangle$  ecc.)

Natiamo che possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_{f,i} &= \langle k_1 \dots k_n | p_1 \dots p_m \rangle \\ &= \langle k_1 \dots k_n | \overset{\sqrt{2\omega_i} \text{ out}}{a_i} | p_1 \dots p_m \rangle \quad (\text{if fatt } \sqrt{2\omega_i} \text{ viene dalla non-} \\ &= \langle k_1 \dots k_n | \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d a_i}{d t_i} | p_1 \dots p_m \rangle \quad \text{leggi stati fisici}) \end{aligned} \quad (17)$$

dove siamo supponendo che  $p_1 \dots p_m \neq k_1 \dots k_n$  per ogni  $n, m$  (elemento di matrice  $T$ ).

e analogamente

$$S_{f,i} = \langle k_1 \dots k_n | \int_{-\infty}^{\infty} d t_i' \frac{d a_i^{\dagger}}{d t_i'} | p_1 \dots p_m \rangle \quad (18)$$

Concentriamoci su un contributo di tipo "in".  
Usando la definizione in termini di transizione: (notare la conc. dei fattori  $\sqrt{2\omega}$ )

$$\begin{aligned} S_{f,i} &= \langle k_1 \dots k_n | \int_{-\infty}^{\infty} d t_i \frac{d}{d t_i} \int d^3 x_1 (i) \frac{e^{-i p_1 x_1}}{\sqrt{2\omega_1}} \phi(x_1) | p_1 \dots \rangle \\ &= i \int d^4 x_1 \langle k_1 \dots k_n | e^{-i p_1 x_1} (\square - \square^2) \phi(x_1) | p_1 \dots \rangle \\ &= i \int d^4 x_1 \langle k_1 \dots k_n | e^{-i p_1 x_1} (\square - \square + m^2) \phi(x_1) | p_1 \dots \rangle \end{aligned}$$

$$= +i \int d^4 x_1 \langle k_1 \dots k_m | e^{-i p_1 x_1} (\not{D}_{x_1} + m^2) \phi(x_1) | p_1 \rangle \quad (19)$$

Nel caso di particelle ant, lo stesso argomento porta a

$$S_{fi} = i \langle k_1 \dots k_m | \int d^4 y_1 e^{i k_1 y_1} (\not{D}_{y_1} + m^2) \phi(y_1) | p_1 \rangle \quad (20)$$

Notare che ci sono due seg. (-): ma perché ora si usa la (17) anziché la (18) (integrale indt fra tempo iniziale e finale), e l'altra per il segno nel cronotico.

Possiamo usare questo argomento ripetutamente notando che

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 i e^{-i p_1 x_1} (\not{D}_{x_1} + m^2) \langle k_1 \dots k_m | \phi(x_1) | p_2 \dots p_m \rangle \\ &= + \int d^4 x_1 i e^{-i p_1 x_1} (\not{D}_{x_1} + m^2) \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \langle k_1 \dots k_m | T(\phi(x_1) \frac{d\phi}{dt_2}) | p_3 \dots p_m \rangle \quad (21) \end{aligned}$$

dove il prodotto cronologico è necessario perché il termine a  $t = +\infty$  non contribuisca, dopo di che l'argomento procede come prima. Si trova così infine

$$S_{fi} = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_m d^4 y_1 \dots d^4 y_m e^{-i p_1 x_1} \dots e^{i k_1 y_1} \dots e^{i k_m y_m} (\not{D}_{x_1} + m^2) \dots (\not{D}_{y_1} + m^2) \dots$$

$$x \langle 0 | T(\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(y_n)) | 0 \rangle \quad (22)$$

Notiamo che questo è un contributo alla matrice  $T$ , avendo definito

$$S = 1 + i T \quad (23)$$

e specificare alla parte connessa della matrice  $T$ , in quanto abbiamo fatto l'ipotesi che gli impulsi entranti ed usanti siano tutti diversi fra loro.

Possiamo quindi leggere la Eq. (22) come  $\int d^4 x_1 \dots d^4 y_n e^{+i p_1 x_1 + i k_n y_n} \dots e$

$$S_F^{-1}(x_1, x'_1) \dots S_F^{-1}(y_n, y'_n) G_{n+m}(x'_1 \dots x'_n; y'_1 \dots y'_n)$$

$$G_{n+m}(x_1 \dots y_n) = \langle T \varphi(x_1) \dots \varphi(y_n) \rangle \quad (24)$$

$$S_F^{-1}(x_1, x'_1) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i k(x_1 - x'_1)} = \frac{-i}{(k^2 - m^2)}$$

Prendendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri ed invertendo abbiamo

$$G_{n+m}(x_1 \dots y_n) = \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 p_m}{(2\pi)^4} e^{+i p_1 x_1} \dots e^{-i k_n y_n}$$

$$\frac{i}{k_1^2 - m^2} \dots \frac{i}{p_m^2 - m^2} i T(k_1 \dots k_n; p_1 \dots p_m) \quad (25)$$

$$i T(k_1 \dots k_n; p_1 \dots p_m) = S^{-1}(k_1) \dots S^{-1}(p_m) G_{n+m}(k_1 \dots p_m)$$

Questo dimostra il risultato annunciato:  
 la f. di Green ha un polo multiplo, di cui l'apice  
 (el. di indice  $T$ ) e il residuo.

Possiamo infine definire una f. di Green nello spazio  
 degli impulsi

$$G(k_1 \dots k_n, p_1 \dots p_m) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_m e^{-i p_1 x_1} \dots e^{-i k_n x_n} G(x_1 \dots x_m) \quad (24)$$

che permette di scrivere la formula di riduzione  
 pienamente nello spazio degli impulsi:

$$G_{n+m}(k_1 \dots p_n) = S(k_1) \dots S(p_n) iT(k_1 \dots k_n; p_1 \dots p_n)$$

Nel caso di spin più elevato la definizione degli op.  
 di distruzione e creazione, e dunque il risultato finale,  
 contengono la corrispondente soluzione delle eq. classiche  
 del moto.

Specificamente abbiamo:

Fermioni

$$\langle p_1 \dots p_n | k_1 \dots k_m \rangle = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_m e^{-i p_1 x_1} \dots e^{-i k_m x_m} \langle p_1 \dots p_n | \bar{\psi}(x) \psi(x) | k_1 \dots k_m \rangle \quad (27)$$

$$= \int d^4 x_1 \bar{u}(p_1) e^{-i p_1 x_1} (-i \not{\partial}_{x_1} - m) u(k_1) e^{-i k_1 x_1} \dots \quad (28)$$

$$\langle p_1 \dots p_n | \psi(x) | k_1 \dots k_m \rangle \quad (28)$$

# Spin 1 massa 0

$$\langle p_1 \dots p_n | k \dots km \rangle = +i \int d^4x_1 e^{-ik_1 x_1} \square_{x_1} m^2$$

$$\langle p_1 \dots p_m | A_\mu | p_2 \dots p_n \rangle (-g^{\mu\nu}) \varepsilon^\nu(k_1) \quad (29)$$

In generale la regola per la "funzione d'onda"

e'

$u(p)$  fermione entrante

$\bar{u}(p)$  fermione uscente

$\bar{v}(p)$  antifermione entrante

$v(p)$  antifermione uscente

$\varepsilon^\mu$   $\gamma$  entrante

$\varepsilon^{*\mu}$   $\gamma$  uscente

$e^{-ipx}$  particella entrante (anti')

$e^{ipx}$  particella uscente (anti')

## 4.2 Il teorema di Wick e il vertice

Come si è visto possiamo ridurre il calcolo del funzionale generatore per la teoria in interazione al calcolo di funzioni di Green della teoria libera ponendo

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D\varphi \ e^{i\sqrt{d} \int d^4x \mathcal{L}_0 + \int d^4x J\varphi} \\ &= \int D\varphi \sum_k \frac{(-i)^k}{k!} (V[\varphi])^k e^{i\sqrt{d} \int d^4x \mathcal{L}_0 + \int d^4x J\varphi} \\ &= \int D\varphi \sum_k \frac{(-i)^k}{k!} \left( V\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] \right)^k e^{i\sqrt{d} \int d^4x \mathcal{L}_0 + \int d^4x J\varphi} \end{aligned} \quad (30)$$

da cui segue che

$$G_n(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta J^n} Z[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta J^n} \sum_k \frac{(-i)^k}{k!} \left( V\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] \right)^k Z_0[J] \Big|_{J=0} \quad (31)$$

In definitiva dunque il calcolo della generica f. di Green è ridotto al calcolo della f. di Green per la teoria libera.

Quest'ultima ha la forma generica

$$\frac{1}{\langle 0|0\rangle} \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi(x_n)|0\rangle = (-i)^n \sum_{\text{coppie}} D_F(x_{i_1} - x_{i_2}) \dots D_F(x_{i_{n-1}} - x_{i_n}) \quad (32)$$

dove la somma corre su tutti i distinti accoppiamenti di  $n/2$  coppie delle  $n$  coordinate, e la f. di Green si annulla se  $n$  è dispari.

Ad esempio, la f. di Green a 4 punti è data da

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \quad (33)$$

Questo a volte si indica con

$$\frac{1}{\langle 0|0\rangle} \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle = \langle 0|\underbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)}\underbrace{\phi(x_3)\phi(x_4)}|0\rangle + \dots \quad (34)$$

risultato noto come teorema di Wick.

Dalla Eq. (30-31) segue quindi che la struttura delle f. di Green (e quindi, per la f. di adizione, delle ampiezze) è determinata dal modo in cui il termine di potenziale permette di soddisfare il ker. di Wick. Per illustrare questo punto, calcoliamo una semplice ampiezza di transizione in QED.

~~Consideriamo~~ Consideriamo cioè la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \bar{\psi} \not{A} \psi \quad (35)$$

tale che  $V[\psi, A] = e \bar{\psi} A \psi$  (36)

Supponiamo di voler calcolare l'ampiezza  $\langle e^+ e^- | s \rangle$   
 la formula di riduzione ci dice che questa si ottiene  
 dalla f. di Green a tre punti

$$G^{(3)}(y_1, y_2; x_1) = \underbrace{\langle 0 | T A_\mu(x_1) \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) | 0 \rangle}_{\langle \bar{a} a \rangle} \quad \downarrow \quad e^- \quad (37)$$

Il primo contributo perturbativo non nullo si ottiene  
 sviluppando

$$G^{(3)}(y_1, y_2; x_1) = \int d^4x \underbrace{\langle 0 | T A_\mu(x_1) \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) \psi(x) A_\mu(x) | 0 \rangle}_{\langle \bar{a} a \rangle} = \int d^4x D_F^{\mu\nu}(x_1 - x) S_F(y_1 - x) (-ie\gamma^\mu) S_F(x - y_2)$$

Notiamo che i propagatori sono collegati da un vertice :  $-ie\gamma^\mu$  (38)

Ora usiamo la formula di riduzione: troviamo

$$\begin{aligned} \langle k_1 k_2 | p_1 \rangle &= \int d^4x_1 d^4y_1 d^4y_2 d^4x e^{-ip \cdot x_1} e^{i(k_1 y_1 + k_2 y_2)} \\ &\quad \delta^{(4)}(x_1 - x) \delta^{(4)}(y_1 - x) \delta^{(4)}(x - y_2) \\ &\quad \varepsilon^\mu(p) \bar{u}(k_1) (-ie\gamma^\mu) v(k_2) = \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p) \bar{u}(k_1) (-ie\gamma^\mu) v(k_2) \varepsilon^\mu(p) \quad (39) \end{aligned}$$

Per capire meglio il risultato ci deriviamo usando un  
 formalismo hamiltoniano in rappresentazione di interazione  
 calcoliamo

$$\langle k_1 k_2 | p_1 \rangle = \sqrt{2E_1 2E_2 2\omega} \langle 0 | b_{k_1} d_{k_2} S_{int} a_p^\dagger | 0 \rangle \quad (40)$$

dove  $a^\dagger, b, d$  sono op. di creazione e distruzione in rapp. di interazione, ossia, ricordando che  $\frac{d}{dt} a(t) = [a, V]$ , proprio gli stati q. in, out della teoria di interazione

e

$$S_{int} = T \exp \left( i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}_{int} + V[a] \right) \quad (4)$$

ossia il potenziale calcolato in l. degli op. di campo definiti come nella teoria libera

Troviamo

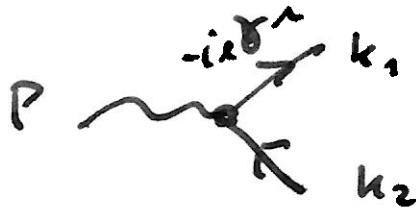
$$V(p, k_1, k_2) = \sqrt{2E_1 2E_2 2\omega} \langle 0 | b_{k_1} d_{k_2} (-ie) \int d^4x \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3p'}{(2\pi)^9 \sqrt{2E_1 2E_2 2\omega}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_1} \left( b_{k_1}^{\lambda_1} \bar{u}_{k_1}^{\lambda_1} e^{ik_1 x} + d_{k_1}^{\lambda_1} \bar{v}_{k_1}^{\lambda_1} e^{-ik_1 x} \right) \gamma^\mu \\ & \sum_{\lambda_2} \left( b_{k_2}^{\lambda_2} \bar{u}_{k_2}^{\lambda_2} e^{-ik_2 x} + d_{k_2}^{\lambda_2} \bar{v}_{k_2}^{\lambda_2} e^{ik_2 x} \right) \\ & \sum_{s'} \left( \varepsilon_\mu^{s'}(p') a_{p'}^{s'} e^{-ip' x} + \varepsilon_\mu^{*s'}(p') a_{p'}^{s'} e^{ip' x} \right) a_p^{s'}(0) \\ & = -ie \int d^4x \bar{u}_{k_1}^{\lambda_1} \gamma^\mu v_{k_2}^{\lambda_2} \varepsilon_\mu^s(p) e^{-ix(p - (k_1 + k_2))} \\ & = -ie (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - (k_1 + k_2)) \bar{u}_{k_1}^{\lambda_1} \gamma^\mu v_{k_2}^{\lambda_2} \varepsilon_\mu^s(p) \end{aligned} \quad (4)$$

ossia lo stesso risultato trovato prima.

### 4.3 Le regole di Feynman

Il calcolo fatto fino qui può essere rappresentato graficamente con



dove usiamo il vertice per connettere delle linee che rappresentano i propagatori; e ~~delle linee~~ <sup>altri tipi di</sup> con un diverso stile di tratto per distinguere <sup>le</sup> particelle e antiparticelle distinte dalle particelle medianti le quali si rappresenta il flusso di carica.

Le regole. Qualunque espressione può quindi essere calcolata collegando fra loro propagatori con vertici, e infine usando la regola di riduzione per rimuovere i propagatori da linee esterne e rimpiazzarli con fattori di funzione d'onda. La conservazione dell'impulso al vertice è garantita dai fattori di trasf. di Fourier.

Operativamente, fissate le linee esterne si assegna a ciascuna di esse una funzione d'onda, e si congiungono le linee esterne fra loro in tutti i modi possibili usando una potenza arbitraria  $k$  del vertice, avendo cura di avere un propagatore su ogni linea esterna,

diversando la linea di chiusura annulla il diagramma.  
Si associano quindi a vertici e propagatori i rispettivi  
fattori, e si moltiplica il risultato finale per  
 $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)$ .

richiede sempre uno scambio di fermioni.

Inoltre notiamo che il denominatore  $\langle 0|0 \rangle$  contiene tutti i diagrammi vuoto-vuoto. Ora osserviamo che ~~disperdere~~ qualunque fattore dell'interazione può produrre un risultato nullo o agendo sulle linee esterne o connesse all'esterno, o su linee disconnesse da linee esterne. Quest'ultimo contributo è ovviamente lo stesso sia che visino capi esteri, sia che non visino.

Inoltre, vista la natura distributiva delle derivate questo contributo è sempre fattorizzabile. Ne segue che per dividere per l'ampiezza vuoto-vuoto rimangono i contributi disconnessi.

Nota che qui "disconnessi" significa "in parti del diagramma non connesse né alle linee esterne né al resto del diagramma". Contributi disconnessi nel senso che data il diag. si può separare in due senza tagliare linee esterne sono presenti a livello di l. di Green, per essere vicini della formula di riduzione. Veggiamo rimossi prendendo il l. come vedremo in seguito.

Fattore di simmetria: 
$$g \prod_{n=2}^{\infty} 2^B (n!)^{d_n}$$

$d_n$  numero di coppie di vertici connessi da  $n$  linee solitarie

Es



$n=2$

$d_n=1$



$n=3$

$d_n=1$



$n=2$

$d_n=2$

$g$  # permutazioni di vertici che lasciano il diagramma invariato con fisse linee esterne

Es



$g=2$

$\beta$  numero di linee che connettono i vertici a se stesso

$\beta=1$

$g=1$

Vanno inoltre tenuti in conto i seguenti fattori combinatori:

- nel calcolo del vertice, se vi sono più campi uguali, va incluso un fattore pari al numero delle loro permutazioni. Questo fattore è incluso a livello di regola di Feynman.

Ad es se  $V_I = \frac{1}{4!} \phi^4$

regola di Feynman  $-i\lambda$

- va incluso un fattore di simmetria  $\frac{1}{S}$  dove  $S$  è l'ordine <sub>e vertici</sub> del gruppo delle permutazioni di linee interne che lasciano il diagramma invariato con fisse linee esterne: infatti le permutazioni di linee ai vertici e le permutazioni di vertici sono divise risp. dal fattore di cui alla regola precedente, e dal fattore  $\frac{1}{n!}$  nello sviluppo dell'esponenziale. «Questi fattori si cancellano con fattori che vengono dalle derivate funzionali, nel senso che ogni derivata può agire su tutti i campi dello stesso tipo. Tuttavia una volta che la prima derivata ha agito quel campo è stato "speso" ed un diverso ordinamento di derivate che avrebbe prodotto lo stesso risultato non porta in fatt. 2: tale fattore invariante per i fattori di simmetria alla fine del calcolo

- va incluso un segno - relativo per tra due diag. che differiscono per scambio di fermioni

- va incluso un fatt. -1 per ogni linea chiusa (loop) fermionica: infatti essa può essere solo ottenuta da

$$\langle 0 | T \bar{\psi} A \psi(x_1) \bar{\psi} A \psi(x_2) | 0 \rangle \text{ da manifestarsi}$$

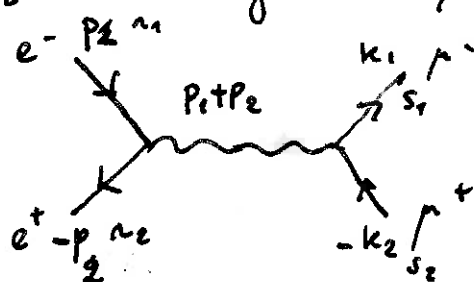
# V Calcolo di sezioni d'urto "ad albero": $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

## 1. Calcolo dell'ampiezza: tracce sulle matrici $\gamma$

Approfiamo ora il calcolo dell'ampiezza per il processo  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

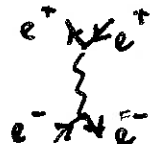
Supponiamo cioè che vi siano due specie diverse di fermioni carichi, con la stessa carica ma masse diverse.

Vi è quindi solo un diagra. di Feynman:



(1)

Notiamo che per  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  (o  $\mu^+\mu^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ) vi sarebbe anche il diagramma



Scriviamo l'ampiezza per questo processo al primo ordine perturbativo usando le regole viste prima:

$$M = \bar{u}^{s_1}(k_1) \gamma^\mu v^{s_2}(k_2) (-ie) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\nu u^{s_1}(p_1) (-ie) =$$

$$= \bar{u}^{s_1}(k_1) \gamma^\mu v^{s_2}(k_2) \bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma_\mu u^{s_1}(p_1) \frac{ie^2}{q^2} \quad (2)$$

la probabilità di transizione è il modulo quadro dell'ampiezza:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} \bar{u}^{s_1}(k_1) \gamma^\mu v^{s_2}(k_2) \bar{v}^{s_2}(k_2) \gamma^\nu u^{s_1}(k_1)$$

$$\bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\nu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\mu v^{s_2}(p_2) \quad (3)$$

dove abbiamo fatto uso di  $(\bar{u} \gamma^\mu v)^\dagger = \bar{v} \gamma^\mu u$

Il risultato si semplifica considerevolmente se supporremo che gli spin non siano osservati. In tal caso occorre sommare nelle pol. finali e mediare su quelle iniziali:

$$|M|_{\text{impol}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, a_1, a_2} M(s_1, s_2, a_1, a_2) \quad (4)$$

Ora notiamo che

$$p_+ = \sum_n u^n(p) \bar{u}^n(p) = \not{p} + m \quad (5)$$

$$P_- = \sum_n \psi^{(n)}(p) \bar{\psi}^{(n)}(p) = \not{p} - m \quad (6)$$

Dimostrazione:

introduciamo la matrice

$$\gamma_S = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (7)$$

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (8)$$

Proprietà-

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad (9)$$

La base di 16 matrici  $\mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^5, \gamma_5$

4x4 può essere silenzioso  
 attn: masse diverse!!

$$|M|^2_{\text{total}} = \frac{1}{4} \frac{\text{Tr}(\gamma^\mu (\cancel{p}_2 - m_\mu) \gamma^\nu (\cancel{p}_1 + m_\mu))}{\text{Tr}(\gamma^\mu (\cancel{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\cancel{p}_2 - m_e))} \frac{e^4}{q^4} \quad (13)$$

Le tracce di matrici  $X$  si calcolano usando le seguenti proprietà:

$$(14) \quad T_n \equiv 4$$

(15)  $T_\alpha \gamma^\mu = 0$  Dim:  $T_\alpha \gamma^\mu = T_\alpha \gamma^\mu \gamma_5^2 = -T_\alpha \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 = -T_\alpha \gamma^\mu \gamma_5$

(16)  $T_2 V_2 = 0$  Dim: stessa, con  $T_2 V_2 = T_2 V_2 V_2^2$  ecc.

$$(17) \quad T_{\mu}^{\mu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu}^{\mu} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) = 4 g^{\mu\nu}$$

$$(18) \quad T_r \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i} T_r (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 0$$

$$(19) \quad T_r (\text{numero dispari di } \gamma) = 0 \quad \text{dim: } T_r (\gamma \dots \gamma) = T_r (\gamma \dots \gamma \gamma_5^2)$$

$$(20) \quad T_r (\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0 \quad \text{dim: stessa, inserendo } \gamma_\alpha^2 \text{ con } \alpha \neq \mu, \nu$$

$$(21) \quad T_r (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$$

$$(22) \quad T_r (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_5) = -4i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

E' immediato ora calcolare l'el. di matrice:

$$T_r (\gamma^\mu (\not{k}_2 - m_e) \gamma^\nu (\not{k}_1 + m_e)) =$$

$$= T_r (\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu \not{k}_1) - m_e^2 T_r \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (23)$$

$$= 4 (k_2^\mu k_1^\nu - g^{\mu\nu} k_1 \cdot k_2 + k_1^\mu k_2^\nu) - 4 m_e^2 g^{\mu\nu}$$

$$= 4 (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - g^{\mu\nu} (k_1 \cdot k_2 + m_e^2))$$

$$T_r (\gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e)) =$$

$$= 4 (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2 + m_e^2))$$

Troviamo con

$$|M|_{\text{imp}}^2 = \frac{e^4}{4q^4} 16 \left( 2k_1 \cdot p_1 k_2 \cdot p_2 + 2k_1 \cdot p_2 k_2 \cdot p_1 - 4p_1 \cdot p_2 k_1 \cdot k_2 \right.$$

$$\left. - 2(m_e^2 + m_\mu^2) p_1 \cdot p_2 - 2(m_e^2 + m_\mu^2) k_1 \cdot k_2 \right.$$

$$\left. + 4(p_1 \cdot p_2 + m_e^2) (k_1 \cdot k_2 + m_\mu^2) \right)$$

$$= \frac{8e^4}{q^4} \left( k_1 \cdot p_1 k_2 \cdot p_2 + k_1 \cdot p_2 k_2 \cdot p_1 + m_e^2 k_1 \cdot k_2 + m_\mu^2 p_1 \cdot p_2 \right.$$

$$\left. + 2 m_e^2 m_\mu^2 \right) \quad (24)$$

Notiamo che in pratica  $m_e^2 \sim 10^{-4} m_\mu^2$  e quindi

$$|M|_{\text{imp}}^2 \approx \frac{8e^4}{q^4} (k_1 \cdot p_1 k_2 \cdot p_2 + k_1 \cdot p_2 k_2 \cdot p_1 + m_\mu^2 p_1 \cdot p_2) \quad (25)$$

## 2 Cinematica: Invarianti di Mandelstam e sistema di riferimento

Possiamo chiederci da quante variabili indipendenti dipenderà il nostro risultato.

Notiamo che la cinematica per un generico processo  $2 \rightarrow 2$  è specificata da quattro impulsi:

$$\begin{array}{ccc} e^+ + e^- & \rightarrow & \mu^+ + \mu^- \\ p_1 \quad p_2 & & k_1 \quad k_2 \end{array} \quad (11)$$

Di questi, però, solo tre sono indip., visto che

$$p_1 + p_2 = k_1 + k_2 \quad (12)$$

Questo dà 12 componenti indipendenti, di cui però 4 sono determinate dalle condizioni di mass-shell

$$\begin{aligned} p_i^2 &= m_e^2 \\ k_i^2 &= m_\mu^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Inoltre, l'invarianza di Lorentz implica che vi siano 6 leggi di conservazione (così come l'inv. per traslazioni spaziotemporali implica le 4 leggi di cons. dell'impulso). Restano quindi  $12 - 4 - 6 = 2$  gradi di libertà residui, ad es. un'energia

ed un angolo. Se scegliamo di parametrizzare il risultato in termini degli scalari che possiamo formare con i vettori dati, vediamo che vi sono 2 scalari indipendenti: (6 scalari in totale, visto che gli scalari implementano automaticamente l'inv. di Lorentz, - 4

relazioni tra essi dovute all'eq. (12))

Possiamo esprimere questi scalari in termini di invarianti di Mandelstam;

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 = 2k_1 \cdot k_2 + m_e^2 + m_e^2 = 2p_1 \cdot p_2 + m_e^2 + m_e^2 \\ (14) \quad t &= (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2 = -2k_1 \cdot p_1 + m_e^2 + m_\mu^2 = -2k_2 \cdot p_2 + m_e^2 + m_\mu^2 \\ u &= (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2 = -2k_1 \cdot p_2 + m_e^2 + m_\mu^2 = -2k_2 \cdot p_1 + m_e^2 + m_\mu^2 \end{aligned}$$

Notare che

$$\begin{aligned} s+t+u &= 2p_1 \cdot p_2 + m_e^2 + m_e^2 - 2p_1 \cdot k_1 + m_e^2 + m_e^2 \\ &\quad - 2k_2 \cdot p_1 + m_e^2 + m_e^2 \\ &= 2p_1(p_2 - k_1 - k_2) + m_e^2 + m_e^2 + m_e^2 + m_e^2 \\ &\quad + 2m_e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= m_e^2 + m_e^2 + m_e^2 + m_e^2 \\ &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + 2p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_4 = 3p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \\ &\text{Poiché la (15) lega i tre inv. di Mandelstam, solo due di essi sono indipendenti; e possiamo usarli per parametrizzare qualunque processo.} \end{aligned} \quad (15)$$

Nel nostro caso

$$\begin{aligned} s &= 2(p_1 \cdot p_2 + m_e^2) \approx 2p_1 \cdot p_2 \\ &= 2(k_1 \cdot k_2 + m_\mu^2) \\ t &= -2k_1 \cdot p_1 + m_e^2 + m_\mu^2 \approx -2k_1 \cdot p_1 + m_\mu^2 \\ &= -2k_2 \cdot p_2 + m_e^2 + m_\mu^2 \approx -2k_2 \cdot p_2 + m_\mu^2 \\ u &= -2p_1 \cdot k_2 + m_e^2 + m_\mu^2 \approx -2p_1 \cdot k_2 + m_\mu^2 \\ &= -2k_1 \cdot p_2 + m_e^2 + m_\mu^2 \approx -2k_1 \cdot p_2 + m_\mu^2 \\ s+t+u &\approx 2m_\mu^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Ponendo

$$q = p_1 + p_2 \quad (17)$$

$$k_1 + k_2 = p_1 + p_2$$

possiamo quindi scrivere l'elemento di matrice in termini di invarianti:

$$|M|^2 = \frac{2e^4}{s^2} [(\epsilon - m^2)^2 + (u - m^2)^2 + 2m^2 s] \quad (18)$$

ove abbiamo posto  $m = m_\mu$ ,  $m_e = 0$ .

In pratica, per ottenere una predizione verificabile sperimentalmente, abbiamo esprimere il risultato in termini di energie ed angoli. Per tal fine scegliamo un sistema di riferimento.

Una scelta naturale è il sistema del centro di massa, definito dalla richiesta che si annulli il tri-impulso iniziale, e cioè

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2:$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \nearrow \theta & \\
 \overrightarrow{P_1 = (E, 0, 0, p)} & \leftarrow & \overrightarrow{P_2 = (E, 0, 0, -p)} \\
 \nwarrow & & \nearrow \\
 & k_2 = (E, -\vec{k}_1) & 
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 k_1 = (E, p' \sin \theta, 0, p' \cos \theta) \\
 p' = \sqrt{E^2 - m_\mu^2} \\
 p = \sqrt{E^2 - m_e^2}
 \end{array}
 \quad (19)$$

Notare che questa è la più generale espressione quando le masse delle due particelle iniziali sono uguali tra loro, e così quelle delle due part. finali. Se le masse fossero tutte uguali ha loro avremmo <sup>anche</sup>  $p = p'$ .

Gli inv. di Mandelstam sono

$$(20) \quad s = 4E^2 = E_{cm}^2 \quad (\text{questo è vero qualunque siano le masse})$$

$$(21) \quad t = (k_1 - p_1)^2 = -2(E^2 - p p' \cos \theta) + m_e^2 + m_\mu^2 \quad (\text{se } m_e = m_\mu \Rightarrow -2p^2(1 - \cos \theta))$$

$$(22) \quad u = (k_2 - p_1)^2 = -2(E^2 + p p' \cos \theta) + m_e^2 + m_\mu^2 \quad (\text{se } m_e = m_\mu \Rightarrow -2p^2(1 + \cos \theta))$$

L'ampiezza, ponendo  $m_e^2 = 0$  coniche  $p = E$ , diventa

$$|M|^2 = \frac{g^4}{16 E^4} \left( E^2 (E - p' \cos \theta)^2 + E^2 (E + p' \cos \theta)^2 + 2 m^2 E^2 \right)$$

$$= \frac{e^4}{E^4} \left( E^4 + E^2 p'^2 \cos^2 \theta + m^2 E^2 \right)$$

$$= e^4 \left( 1 + \frac{p'^2}{E^2} \cos^2 \theta + \frac{m^2}{E^2} \right) = e^4 \left[ 1 + \frac{m^2}{E^2} + \left( 1 - \frac{m^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right] \quad (23)$$

$$= e^4 \left[ (1 + \cos^2 \theta) + \frac{m^2}{E^2} (1 - \cos^2 \theta) \right]$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2 E_1 2 m_2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} \right| \\
&= 4 m_2 |\vec{p}_1| = 4 m_2 \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \\
&= 4 m_2 \sqrt{\left( \frac{p_1 \cdot p_2}{m_2} \right)^2 - (m_1)^2} \\
&= 4 \sqrt{p_1 \cdot p_2^2 - m_1^2 m_2^2}
\end{aligned} \tag{47}$$

Per finire, dobbiamo fissare la misura di integr. sullo stato finale,  $df$ . A questo fine, notiamo che gli stati finali possibili sono caratterizzati da quadi-impulsi  $k_i$  generici, salvo la condizione di mass-shell  $k_i^2 = m_i^2$ . Usando l'identità (I.85) abbiamo quindi:

$$df = \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \dots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3 2E_{k_n}} \tag{48}$$

$$d\sigma = |M_{if}|^2 \frac{1}{4 \sqrt{p_1 \cdot p_2^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n k_i) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \dots \frac{d^3 k_n}{(2\pi)^3 2E_{k_n}} \tag{49}$$

Notiamo che lo spazio delle fasi è dato dall'elemento  $df$  soggetto al vincolo di conservazione dell'impulso, che permette di eseguire 4 delle integrazioni. Notiamo inoltre che  $\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$  è uno scalare di Lorentz.

Possiamo ora finalmente determinare la sez. d'urto per il processo  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ . Il di motrice è stato calcolato nel rist. del CM nell'eq. (23). Ci servono quindi fattore di flusso e spazio delle fasi nello stesso SR.

Fattore di flusso:

$$\Phi = 4 E_1 E_2 \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| = \frac{8 E_1 E_2 \sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E} \approx 8 E^2 \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{E^2}} \approx 8 E^2 \tag{49}$$

## Spazio delle fasi

$$df = \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^3 2E_{k_1} (2\pi)^3 2E_{k_2}} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_f) \quad (50)$$

Nel sist. del c.m.  $p_f = (2E, \vec{0})$

quindi la  $\delta$  tridimensionale pone  $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 \Rightarrow E_{k_1} = E_{k_2}$  visto che le masse delle due part. nello stato finale sono uguali:

$$\begin{aligned} df &= \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^2 (2E_{k_1})^2} \delta(2E_{k_1} - 2E) \\ &= \frac{k_1^2 dk_1 d\Omega}{16\pi^2 E_{k_1}^2} \delta(2\sqrt{k_1^2 + m^2} - 2E) \\ &= \frac{d\Omega}{32\pi^2} \frac{k_1}{E_{k_1}} = \frac{d\Omega}{32\pi^2} \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E} \end{aligned} \quad (51)$$

con  $d\Omega = d\cos\theta d\varphi$ ,  
dove abbiamo usato

$$\delta(2\sqrt{k_1^2 + m^2} - 2E) = \frac{\delta(k_1 - \sqrt{E^2 - m^2})}{2k_1/E} \quad (52)$$

Mettendo tutto assieme troviamo

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^4}{8E^2 32\pi^2} \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{E} \left( 1 + \frac{m^2}{E^2} + \left( 1 - \frac{m^2}{E^2} \right) \cos^2\theta \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{16E^2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \left( 1 + \frac{m^2}{E^2} + \left( 1 - \frac{m^2}{E^2} \right) \cos^2\theta \right) \end{aligned} \quad (53)$$

$\alpha \equiv e^2/4\pi$  cost. di struttura fine

La sezione d'urto totale si ottiene integrando in  $d\Omega = d\cos\theta d\varphi$

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{E^2} \right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \quad (54)$$

Nel limite di alta energia  $E \gg m$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{HE} = \frac{\alpha^2}{16E^2} (1 + \cos^2\theta) \quad (55)$$

$$\sigma_{tot, HE} = \frac{\alpha^2 \pi}{3E^2} = \frac{4\alpha^2 \pi}{3s} \quad (56)$$

Notiamo che  $\sigma_{tot} \propto \frac{1}{s}$  segue dall'analisi dimensionale e dal fatto che  $\sigma$  è scalare. Inoltre che  $\sigma \propto \alpha^2 (1 + o(\alpha))$  segue dalla struttura generale dell'accoppiamento fotone-particella carica. Quindi per ciò che concerne  $\sigma_{tot}$ , tutto questo calcolo è servito per determinare il fattore  $\frac{4}{3}\pi$ , e le correzioni di  $O(\frac{m}{E})$ .

Per ciò che concerne  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  possiamo notare quanto segue:

- nel limite di alta energia  $m \approx 0$  gli spinori sono autostati di elicità:

$$\not{p} \frac{\mu}{\nu} = 0 \quad (57)$$

implica  $\gamma_5 \gamma^\mu \not{p} \frac{\mu}{\nu} = E \gamma_5 \frac{\mu}{\nu} \quad (58)$

che  $\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu = \Sigma^\mu \quad (59)$

quindi  $\hat{p} = \Sigma \frac{\mu}{\nu} = \pm \gamma_5 \frac{\mu}{\nu} \quad (60)$

Quindi vediamo che gli autostati di spin ad alta energia sono autostati di elicità, che a sua volta pari all'autovalore di  $\pm \gamma_5$  (per particelle o antiparticelle).

- In tale limite, l'accoppiamento comporta sempre un flip di elicità:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi &= \bar{\psi} \frac{(1 \pm \gamma_5) \gamma_\mu (1 \pm \gamma_5)}{2} \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \end{aligned} \quad (61)$$

Pertanto la coppia  $e^+e^-$  e  $\mu^+\mu^-$  hanno elicità opposte, quindi spin concordi. Ne segue che si annidano in un fotone di spin  $\pm 1$  diretto lungo l'asse  $z$  (asse della collisione), il  $ss$  e devono produrre un fotone di spin  $\pm 1$  diretto lungo l'asse  $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ . L'overlap  $e^-$  quindi  $\epsilon_{in}^\mu = (0, 1, \pm i, 0)$

$$\epsilon_{out}^{\mu*} = (0, \sin\theta, \pm i, \cos\theta) \quad (62)$$

$$\epsilon_{in}^\mu \epsilon_{out}^{\mu*} = \frac{1}{2} (1 \pm \cos\theta) \quad (63)$$

( $+$   $\rightarrow$  fotone  $\pm 1$  entrante    fotone  $\pm 1$  uscente)  
 ( $-$         "  $\mp 1$  entrante        "  $\mp 1$  uscente)

Sommando il modulo dei 4 casi possibili abbiamo quindi:

$$\sum |\epsilon_{in}^\mu \epsilon_{out}^{\mu*}|^2 \propto (1 + \cos\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2 \\ \propto (1 + \cos^2\theta) \quad (64)$$

Vediamo così che anche la dipendenza angolare della  $ss$  di into differenziale dipende esclusivamente da considerazioni di simmetria.

### 3. Serie d'nto, fattore di flusso, spazio delle fasi

La serie d'nto generalizza il concetto di serie geometrica di un oggetto. Infatti il numero di oggetti di flusso da un disco di serie  $S$  su cui incide un flusso  $j$  di particelle per un tempo  $T$  e', ricordando che

$$j = \frac{dn}{dS dt} \quad (24)$$

$$N = j \Delta T S \quad (25)$$

Definiamo quindi serie d'nto

$$\sigma = \frac{N}{j \Delta T} \quad (26)$$

Quantisticamente  $N e^{-}$  la probabilita di rivelare il sistema preparato nello stato iniziale  $|i\rangle$  in uno stato finale  $|f\rangle$  e quindi

$$\sigma = \frac{1}{j \Delta T} \int |\langle f|i \rangle|^2 dL \quad (27)$$

L'ampiezza  $|\langle f|i \rangle|^2$  calcolata perturbativamente e'

data dalla regola area di Fermi:

$$|\langle p | i \rangle|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) |\langle p_f | i \rangle|^2 \quad (28)$$

dove  $|i\rangle_p$ ,  $|f\rangle_p$  sono autostati dell'impulso iniziale e finale.

Il fattore di flusso per particelle aventi la velocità  $v$  è

$$j_{dt} = \Phi = n_1 n_2 |v_1 - v_2| \quad (29)$$

dove  $n_i = 2E_i$  visto che  $\langle p | p' \rangle = 2E \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$

$$\text{mentre } |v_1 - v_2| = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right|$$

Possiamo scrivere  $\Phi$  in forma covariante scegliendo un SR e scrivendolo in termini di scalari in quell'SR.

Ad es nell'SR in cui la particella  $2e^-$  a riposo abbiamo

## VII La rinormalizzazione

### 1. Gli infiniti ed il loro significato

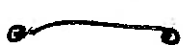
Il calcolo di diagrammi al di là di ~~un loop~~ del primo ordine perturbativo produce generalmente risultati divergenti. Questo fatto ha appena una volta misterioso, o addirittura segno di una difficoltà concettuale della teoria quantistica dei campi, oppure essere una conseguenza inevitabile del principio di indeterminazione, che a sua volta implica che una teoria quantistica di campo non può essere vera a tutte le scale simultaneamente.

Per capirlo, consideriamo dapprima un esempio esplicito. Studieremo quindi la procedura di rinormalizzazione in modo più sistematico. Calcoliamo a questo fine l'ampiezza di scattering elastica  $2 \rightarrow 2$  nella teoria  $\phi^4$  fino ad un loop.

La teoria  $\phi^4$  è definita dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{24} g \phi^4 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1)$$

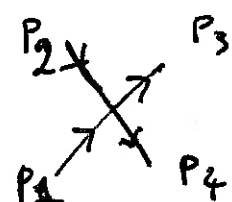
Regole di Feynman:

propagatore:  $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$   (2)

vertice  $-ig$   (3)

Amplitudine di scattering  $\phi\phi$

$$\mathcal{M} = -ig$$

  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$  (4)

$$d\sigma = \frac{1}{4} \frac{d^3 p_3}{2E_3 (2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) g^2 \quad (5)$$

SR del CM

$$p_1 = (E, 0, 0, p)$$

$$p_2 = (E, 0, 0, -p)$$

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (6)$$

$$P_3 = (E, p \sin \theta, 0, p \cos \theta)$$

$$P_4 = (E, -p \sin \theta, 0, -p \cos \theta)$$

$$s = 4E^2, t = 2m^2 - 2(E^2 + p^2 \cos \theta), u = 2m^2 - 2(E^2 - p^2 \cos \theta)$$

$$\text{Fattore di Flussò} = -2p^2(1 + \cos \theta) = -2p^2(1 - \cos \theta)$$

$$\Phi = 4E^2 \frac{2p}{E} = 8pE$$

Spazio delle fasi

$$\frac{d^3 P_3}{2E_3(2\pi)^3} \frac{d^3 P_4}{2E_4(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) =$$

$$= \frac{d^3 P_3}{(2E_3)^2 (2\pi)^2} \delta(P_1 + P_2 - 2\sqrt{p_3^2 + m^2}) \quad (9)$$

$$= \frac{p_3^2 2\pi d\cos \theta}{(2E_3)^2 (2\pi)^2} \frac{1}{2 \frac{p_3}{E_3}} \delta(E_3 - E)$$

$$= \frac{p}{E} \frac{1}{16\pi} d\cos \theta \quad (10)$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = g^2 \frac{1}{8pE} \frac{p}{E} \frac{1}{16\pi} = \frac{1}{128\pi} \frac{1}{E^2} g^2 \quad (11)$$

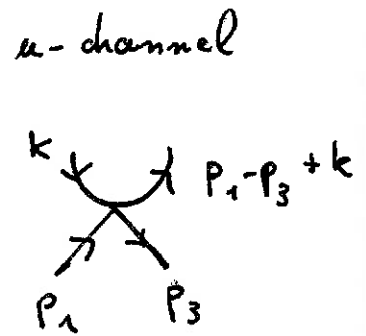
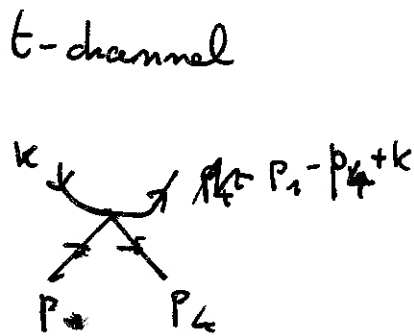
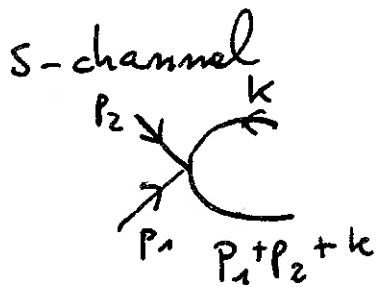
Connessioni ad un loop:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + O\left(\frac{g^2}{g^2}\right) = -ig F(s, t) \quad (12)$$

All'ordine  $g^2$

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

$$(13) \quad \frac{109}{2}$$



$$i\mathcal{M} = \frac{-ig}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2} = ig V(p^2) \quad (14)$$

$$p^2 = \begin{cases} s \\ t \\ u \end{cases}$$

Parametri di Feynman:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{(xA+yB)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA+(1-x)B)^2} \quad (15)$$

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - m^2 + x(2p \cdot k + p^2)]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k + px]^2 - m^2} \quad (16)$$

$$m^2 = -(x p^2 - p^2 x^2) = -p^2 x(1-x) + m^2; \quad \ell = k + xp \quad (17)$$

$$ig V(p^2) = \frac{ig}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - m^2]^2} \quad (18)$$

avendo posto

$$F(s, t) = 1 - ig (V(s) + V(t) + V(u)) + O(g^2)$$

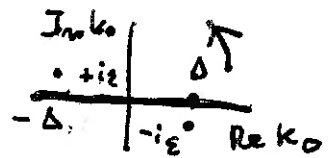
Affrontiamo quindi il calcolo di un integrale della forma

$$\frac{\int d^D k}{(k^2 - M^2 + i\varepsilon)^n} \equiv I_n^D \quad (19)$$

dove lo spazio ha una dim. temporale e  $D-1$  dim. spaziali.

Notiamo che il den. si annulla quando  $k_0 = \pm(\sqrt{M^2 - i\varepsilon})$

$$\text{dove } \Delta^2 = M^2 + |\vec{k}|^2.$$



$$\text{dove } \Delta^2 = M^2 + |\vec{k}|^2.$$

Pertanto, possiamo ruotare il cammino di integrazione in senso antiorario di  $90^\circ$  senza incontrare un polo. Perciò possiamo porre

$$k_E = -i k_0 \rightarrow k_0 = i k_E \Rightarrow dk_0 = i dk_E \quad (20)$$

dimodoché quando

$k_0$  varia da  $-i\infty$  a  $+i\infty$  lungo l'asse imm.,  $k_E$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$  lungo l'asse reale.

L'integ. in  $dk_E = dK_E^0 d\vec{K}$  è così un ordinario integ.  $D$ -dimensionale

condizione:

$$I_n^D = i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_E^2 + M^2)^n} (-1)^n$$

$$= (-1)^n i \int d\Omega_D \int_0^\infty dk_E \frac{k_E^{D-1}}{(k_E^2 + M^2)^n} \quad (21)$$

L'integr. sul volume della D-1 sfera può essere calcolato osservando

che

$$\int d^D x e^{-\frac{1}{2} x^2} = (\sqrt{\pi})^D$$

$$= \int d\Omega_D \int_0^\infty dx x^{D-1} e^{-x^2} \quad (22)$$

$$= \int d\Omega_D \int_0^\infty \frac{dx^2}{2} (x^2)^{\frac{D}{2}-1} e^{-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2}-1\right)! = \frac{1}{2} \Gamma(D/2)$$

da cui

$$\int d\Omega_D = \frac{2 \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \quad (23)$$

D'altra parte

$$\int_0^\infty dk_E \frac{k_E^{D-1}}{(k_E^2 + M^2)^n} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n-D/2) \Gamma(D/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{n-D/2}$$

Mettenendo tutto assieme abbiamo

$$I_n^D = \frac{i (-1)^n}{(2\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{n-D/2}$$

Nel nostro caso abbiamo

$$I_2^4$$

Nel nostro caso troviamo quindi:

$$-igV(p^2) = \frac{i}{2} g \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 dx \frac{i 2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dk \epsilon \frac{k^3}{(k^2 + \pi^2)^2} \quad (24)$$

$$= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} - \frac{1}{2} g \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left( \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \pi^2} \right) dx$$

$$= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} -g \int \frac{1}{32\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{\pi^2} - 1 \right) + O\left(\frac{\pi^2}{\Lambda^2}\right) dx \quad (25)$$

Pertanto il fattore di forma è dato da

$$F(s, t) = 1 + \frac{g}{32\pi^2} \left( \int_0^1 dx \ln \frac{\Lambda^2}{\pi^2(s)} + \ln \frac{\Lambda^2}{\pi^2(t)} + \ln \frac{\Lambda^2}{\pi^2(u)} \right) + 3$$

$$= 1 + \frac{g}{32\pi^2} \left( 3 + \int_0^1 dx \ln \frac{\Lambda^2(s)}{\Lambda^2} + \ln \frac{\Lambda^2(t)}{\Lambda^2} + \ln \frac{\Lambda^2(u)}{\Lambda^2} \right) \quad (26)$$

Possiamo ora chiederci che cosa sia la carica  $g$ : definiamo la carica fisica in termini del fattore di forma in soglia:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right|_{s=s_0, t=t_0} = \frac{g_{phys}^2}{128\pi m^2} \quad (27)$$

con  $s = 4m^2 = s_0$ ,  $t = 0 = t_0 = u$ ,  $E = m$

Questo significa.

$$g F(s_0, t) \equiv g_{phys} = g \left[ 1 + \frac{g}{32\pi^2} \left( 3 + \int_0^1 dx \ln \frac{\Lambda^2(s_0)}{\Lambda^2} + \right. \right.$$

$$+ \ln \frac{\pi^2(u)}{\Lambda^2} + \ln \frac{\pi^2(t)}{\Lambda^2} \Big) \Big] \quad (28)$$

Esprimendo  $F(s,t)$  in termini di  $g_{phys}$  si ha, notando che

se  $g_{phys} = g(1 - \epsilon g)$  allora  $g = g_{phys} (1 + \epsilon g_{phys})$ ,

$$g F(s,t) = \left[ 1 + \frac{g_{phys}}{32\pi^2} \left( \int_0^1 dx \ln \frac{\pi^2(s)}{\pi^2(s_0)} + \ln \frac{\pi^2(t)}{\pi^2(t_0)} + \ln \frac{\pi^2(u)}{\pi^2(u_0)} \right) \right] \quad (29)$$

Esprimendo l'osservabile fisica in termini di un'altra osservabile fisica l'infrailo si cancella.

Osservazioni:

- 1) la scelta di  $s_0, t_0$  è convenzionale. Potremmo anche porre  $(s_0)$   
 $\pi^2(s_0) = \pi^2(t_0) = \pi^2(u_0) = \mu^2$

In particolare, notiamo che le punti finite sono convenzionali.

- 2) Il ruolo della scala  $\Lambda$  e della scala  $\mu$  è molto diverso:  
 $\Lambda$  è una scala di regolarizzazione,  $\mu$  definisce un punto di rinormalizzazione. In particolare, dopo la rinormalizzazione nella dipendenza da  $\Lambda$ , ma le osservabili fisiche dipendono da  $\mu$  (cioè  $g_{phys}$ ) dipende da  $\mu$ , anche se le osservabili fisiche non ne dipendono: la dipendenza esplicita di  $F(s,t)$  deve cancellare la dipendenza da  $\mu$  di  $g_{\mu}$  (RG1)

- 3) Mentre esprimendo  $F(s,t)$  in termini di  $g_{phys}$  gli infiniti si cancellano, gli infiniti

restano se esprimiamo  $g$  (bare) in termini di  $g^{phys}$  (rinormalizzata), ossia questi sono stati riassorbiti dentro  $g^{bare}$ .

Per capirlo, poniamo  $g^{phys} \equiv g_\mu$ ,  $g \equiv g_\Lambda$ , per enfatizzare il fatto che la prima dipende dal punto di rinormalizzazione, la seconda dal cutoff, e scegliamo

$$\mu^2(s_0) = \mu^2(t_0) = \mu^2(m_0) = \mu^2 \quad (31)$$

Abbiamo

$$g_\mu = g_\Lambda \left( 1 + \frac{3g_\Lambda}{32\pi^2} \left( 1 + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right) \quad (32)$$

Vediamo così che scegliendo  $\mu^2$  e  $\Lambda^2$  abbiamo possiamo  ~~$g_\mu$  e  $g_\Lambda$~~  ~~eventualmente~~ esprimere  $g_\mu$  come una funzione di  $g_\Lambda$ , e eventualmente  $g_\mu = g_\Lambda$ .

Si vede dunque che la costante di accoppiamento bare corrisponde a rinormalizzare, ossia definire la <sup>accoppiamento</sup> ~~scala~~ fisica, ad una scala  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ossia a distanze infinitamente corte.

Fisicamente, la cost. di accoppiamento bare corrisponde ad una definizione dell'osservabile fisica che include le fluttuazioni a tutte le scale. Questa diverge come conseguenza del principio di indeterminazione: le scaturite di capriccio spura degli impulsi sono state ottenute come coordinate non di un sistema nello spazio delle posizioni. Le fluttuazioni in punti adiacenti sono indipendenti a tutte le scale, e quindi  $p \sim \Delta x \sim \frac{1}{\Delta x}$ .

## 2. Teoria delle perturbazioni rinormalizzata

Possiamo ora chiederci se la procedura descritta nella sezione precedente possa essere svolta sistematicamente a qualunque ordine perturbativo: è sempre possibile riassumere gli infiniti in una regola? E di quante costanti?

E' noto che  $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2}$  diverge ampiamente. Ma invece di Green, questo equivale al Green può essere rinormalizzato sistematicamente per la teoria  $\phi^4$ . Per calcoli traspari, è sufficiente ripetere il calcolo in modo sistematico e non più ed efficiente.

In primo luogo, sostituiamo il regolatore  $\Lambda(\text{cutoff})$  con la regolarizzazione dimensionale: continuiamo analiticamente

la teoria in  $D = 4 - 2\epsilon$  dimensioni.

In tal caso

$$[\phi] = [M]^{4-\epsilon} \quad (1)$$

e quindi

$$[g] = [M]^{2\epsilon} \quad (2)$$

Possiamo porre

$$g_{\mu\nu} = \mu^{2\epsilon} g_{\mu\nu} \quad (3)$$

sicché il fattore di forma diventa

$$-igV(p^2) = \frac{i}{2} \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \sqrt{\frac{d\epsilon}{(2\pi)^{4-2\epsilon}}} \frac{e^{4-2\epsilon-1}}{(e^2 - m^2)^2} \quad (4)$$

$$= \frac{i}{2} g_\mu \int_0^1 dx \frac{i(-1)^2 \Gamma(\epsilon) (\pi^2)^{-\epsilon} \pi^{2-\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \quad (5)$$

(averò usato  $\int \frac{d^D k}{(k^2 + \pi^2)^m} = (-1)^m i \pi^{D/2} \Gamma(m - \frac{D}{2}) \frac{1}{\Gamma(m)}$   
che viene da  $\int \frac{d^D k k^{D-1}}{(k^2 + \pi^2)^m} = \frac{1}{2} \Gamma(m - D/2) \Gamma(D/2) (\pi^2)^{\frac{D}{2} - m}$ )

$$= -\frac{g_\mu}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \dots \right) \left( \frac{\pi^2}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} (4\pi)^\epsilon$$

$$= -g_\mu \int_0^1 dx \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{\pi^2}{\mu^2} + O(\epsilon) \right) \quad (6)$$

Osserviamo che in DR il parametro regolare dimensionale  $\epsilon^{-1}$  (con il cutoff  $\mu$ )  
Notiamo ora che la rinormalizzazione può essere sempre vista

come una salto di  $g$  - una definizione di  $g$  "fisica".

Ma tale def. è del tutto convenzionale.

La salto "variante fisica" potrebbe essere

$$g_{phys} = g_\mu \left( 1 - \frac{g_\mu}{32\pi^2} \left( 3 \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - \int dx \ln \frac{\pi^2(x)}{\mu^2} + \ln^2 \frac{\pi(x)}{\mu^2} + \ln \left( \frac{\pi(x)}{\mu^2} \right) \right) \right) \Bigg|_{\substack{s=s_0 \\ t=t_0 \\ \mu=\mu_0}} \\ = g F(s_0, t_0) = g (1 - ig (V(s_0) + V(t_0) + V(\mu_0))) \quad (7)$$

dove  $s_0, t_0$  corrisponde ad una certa cinematica.

Ma nulla vieta di scegliere invece un valore non-fisico della cinematica. Particolarmente semplice algebricamente (ma concettualmente oscura) è la sovrarinnormalizzazione

$$\pi S \quad g_{\pi S} = g_{\mu} \left( 1 - \frac{3}{32\pi^2} g_{\mu} \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (8)$$

$$\overline{\pi S} \quad g_{\overline{\pi S}} = g_{\mu} \left( 1 - \frac{3}{32\pi^2} g_{\mu} \left( \frac{1}{\epsilon} - \delta + \ln 4\pi \right) \right) \quad (8')$$

Con questa scelta abbiamo

$$g F(s, t) = g_{\pi S} \left( 1 + \frac{g_{\pi S}}{32\pi^2} \int d^4x \ln \left( \frac{\pi^2(s)}{\mu^2} + \ln \frac{\pi^2(t)}{\mu^2} + \ln \frac{\pi^2(u)}{\mu^2} \right) \right)$$

Notiamo che con la scelta  $\delta$  il risultato è indipendente da  $\mu$  (che prima era il  $\mu$  di  $\pi$ ) ma in  $\overline{\pi S}$  no. Infatti

~~Quindi~~ in  $\overline{\pi S}$  il regolatore  $\mu$  gioca anche il ruolo di

punto di rinormalizzazione: infatti la  $g$  coincide con la  $g$  (29-30)

della sez. precedente, eccetto che lì  $\mu$  era il punto di rin.

non il regolatore! Vediamo quindi la rinormalizzazione con conseguenza

di aver sostituito la cat. di accoppiamento "buona"  $g$  (regolarizzata come  $g_{\mu}$ ) con quella

Ora notiamo anche che nulla vieta di porre il  $\overline{\pi S}$

$$2g = g_{\mu} \left( 1 + \frac{3}{32\pi^2} g_{\mu} \left( \frac{1}{\epsilon} - \delta + \ln 4\pi \right) \right); \quad \delta = g_{\mu}^2 \left( \frac{3}{32\pi^2} g_{\mu} \left( \frac{1}{\epsilon} - \delta + \ln 4\pi \right) \right)$$

$$g = 2g \quad g_{\pi S} = g_{\pi S} + \delta g_{\pi S} \quad (10)$$

(Notare che  $2 = 1 + 0(g)$ )  
 $\delta = 0(g^2)$

Ma allora vediamo che il risultato rinormalizzato (9)

si può anche scrivere come

$$F(s, t) = g_{\mu}(g_{\pi S}) \left( 1 + \frac{g_{\pi S}}{32\pi^2} \int d^4x \ln \left( \frac{1}{\epsilon} - \delta + \ln 4\pi \right) + \ln \frac{\pi^2(s)}{\mu^2} + \ln \frac{\pi^2(t)}{\mu^2} + \ln \frac{\pi^2(u)}{\mu^2} \right) \quad (11)$$

$$= g_{\pi S} \left( 1 + \frac{g_{\pi S}}{32\pi^2} \int d^4x \left( \frac{1}{\epsilon} - \delta + \ln 4\pi \right) + \ln \frac{\pi^2(s)}{\mu^2} + \ln \frac{\pi^2(t)}{\mu^2} + \ln \frac{\pi^2(u)}{\mu^2} \right)$$

$$+ \frac{g_{\pi S}^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \delta + \ln 4\pi \right) \quad (12)$$

con

$$\delta = + \frac{g^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \delta + \ln 4\pi \right) \quad (13)$$

Possiamo vedere quindi l'espressione rinormalizzata come la somma dell'espressione divergente da noi trovata in origine, ma con la costante d'accoppiamento sostituita da quella rinormalizzata, più un termine extra ("controt termine").

Di fatto, possiamo eseguire la sostituzione a livello di Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) - \frac{1}{4!} g \phi^4 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) - \frac{1}{4!} g \frac{2}{\pi^2} \phi^4 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) - \frac{1}{4!} g \frac{2}{\pi^2} \phi^4 - \frac{1}{4!} \delta g \phi^4 \quad (14) \end{aligned}$$

Questa nuova Lagrangiana dà luogo a una nuova regola di Feynman

$$\text{Diagramma a loop} = -i\delta g \quad (15)$$

I risultati sono però veri finiti anche per ordine in teoria delle perturbazioni dell'addizione di un controt termine alla Lagrangiana. La Lagrangiana Eq. (14) dà così luogo ad una teoria delle perturbazioni rinormalizzata, in cui l'espressione

un po' infelice in vista del fatto che i paranchi di questa  
Sagittazione convergono (nei centotenerini) coefficienti infiniti  
La teoria delle f.t. inormalizzate perette di formulare in modo  
compatto il problema generale della inormalizzazione: esiste un  
insieme di centotenerini de clinica talmente infiniti a qualunque  
ordine perturbativo? Come si debbono? Come si debbono?  
Ita lo sventaggio di appaure abstratte artificiosa.

### 3. Rinormalizzabilità

Il problema di rinormalizzare una teoria a tutti gli ordini è stato ridotto, grazie al formalismo introdotto nelle sezioni precedenti, al problema di classificare i possibili controtermini. Naturalmente, ciascun controtermine sarà a sua volta fissato da un'opportuna condizione di rinormalizzazione.

Per classificare i controtermini, preliminarmente dobbiamo chiederci: qual è il grado di divergenza di un diagramma?

Abbiamo, in dimensioni

$$D = dL - 2P \quad (1)$$

(con  $L = \#$  loop;  $P = \#$  propagatori;  $V = \#$  vertici;  $N = \#$  linee esterne)

Per un dato diagramma il numero di loop è

$$L = P - V + 1 \rightarrow \text{nota da quale materia} \quad (2)$$

(ogni propagatore è un nuovo impulso, ogni vertice una  $\delta$ , ma c'è una  $\delta$  overall)

D'altra parte, in una teoria  $d^n$ , in un vertice compaiono  $n$  campi, e quindi

$$V = \frac{1}{n}(2P + N) \quad (3)$$

Possiamo usare le eq. 2-3 per esprimere il numero di loop in termini del numero di vertici e di linee esterne (quindi dell'ordine perturbativo) per dato numero di

linee esterne: dalla (3) abbiamo

$$P = \frac{nV - N}{2} \quad (4)$$

e quindi dalla (2)

$$L = \left(\frac{n}{2} - 1\right) V - \frac{N}{2} + 1 \quad (5)$$

Notiamo che nella teoria  $\phi^4$ ,  $n=4$ , quindi  
loop esiste un extra loop e come una extra potenza di  $g$   
Il grado di divergenza di un diagramma è quindi

$$\begin{aligned} D &= d \left[ \left(\frac{n}{2} - 1\right) V - \frac{N}{2} + 1 \right] - 2 \left[ \frac{n}{2} V - \frac{N}{2} \right] \\ &= d + \left[ n \frac{d-2}{2} - d \right] V - \frac{d-2}{2} N \quad (6) \end{aligned}$$

Nella teoria  $\phi^4$  ind=4 dimensioni si ha

$$D = d - N \quad (7)$$

e quindi il grado di divergenza di un diagramma  
diminuisce al crescere del numero di linee esterne, e non  
dipende dal numero di vertici. Esiste solo un numero finito  
di diagrammi superficialmente divergenti: quelli con non più  
di 4 linee esterne.

Per capire il significato di questo risultato, osserviamo  
che il conteggio di potenze si può equivalentemente eseguire

attraverso l'analisi dimensionale.

Osserviamo infatti che in  $d$  dimensioni la dimensione di un campo scalare è

$$[\phi] = [\pi]^{(d-2)/2} \quad (8)$$

Ne segue che la dimensione di una costante d'accoppiamento corrisponde ad un vertice  $\phi^n$  è

$$[g \phi^n] = [\pi]^d$$

$$[g] = [\pi]^{d - n \frac{d-2}{2}} \quad (9)$$

Ma naturalmente questa è anche la dimensione di un diagramma con  $N$  linee esterne amputate, e quindi di qualunque diagramma con  $N$  linee esterne amputate.

~~Ne segue che un diagramma con  $N$  linee esterne amputate ha dimensione~~  
~~Quindi in generale la dimensione di un diagramma con  $N$  linee esterne amputate è~~  
 ~~$\dim = d - N \frac{d-2}{2}$  (9')~~

D'altra parte se in un vertice  $\phi^n$ , un grafico con  $V$  vertici ha dimensione

$$[g]^V [\pi]^D = [\pi]^{(d - n \frac{d-2}{2})V + D} \quad (10)$$

visto che la dimensionalità del grafico è data o dalle potenze esplicite dell'accoppiamento, o da integrali sugli impulsi, la cui dimensionalità è per definizione il grado di divergenza.

Ne segue che

$$(d - n \frac{d-2}{2})V + D = d - N \frac{d-2}{2} \quad (11)$$

e quindi

## Logica dell'agente

- 1) determina la dimensione di  $g$
- 2) determina la dim. di  $n$  diagonale generica, e scopre che è data da  $D$  e dalla dim di  $g$
- 3) noto che tutti i diagonali con fisso # di righe contengono la stessa dimensione  
→  $D$  in tutti di ind. part. e dim di  $g$
- 4) noto che questa dim è uguale per tutti e  
quella della  $g$  per una tavola  $6^N$   
cioè  $6^N$  con  $n = N$  (tutte le colonne)

$$D = d + V \left( \frac{nd-2}{2} - d \right) - \frac{d-2}{2} N$$

in accordo con la Eq. (6), che è quindi sostanzialmente  
analisi dimensionale.

Capiamo quindi che il grado di divergenza di un diagramma  
cresce al crescere del numero di vertici se e solo se la  
costante di accoppiamento ha dimensioni negative in unità di  
massa. Abbiamo quindi tre situazioni possibili:

- 1) Super-renormalizzabile. Costante d'accoppiamento con dimensione  
positiva in unità di massa. Il grado di divergenza superficiale  
diminuisce con il numero di vertici: solo un numero finito di  
diagrammi di Feynman diverge.
- 2) Rinormalizzabile. Costante d'accoppiamento adimensionale.  
Il grado di divergenza superficiale non dipende dal numero  
di vertici (ma diminuisce al crescere del numero di particelle  
esterne). Solo un numero finito di ampiezze diverge, ma un  
numero infinito di diagrammi diverge.
- 3) Non-renormalizzabile. Costante d'accoppiamento con dimensioni  
negative di massa. Qualunque ampiezza diverge a ordine  
sufficientemente alto in teoria delle perturbazioni.

Studiamo ora quali sono ~~se~~ le ampiezze divergenti nella  
teoria  $\phi^4$ , per capire se e come la teoria possa essere  
rinormalizzata a tutti gli ordini.

Osserviamo innanzitutto che visto che la teoria è invariante  
sotto la trasformazione  $\phi \rightarrow -\phi$  tutte le ampiezze

con un numero dispari di linee esterne si annulla.  
 Vi sono pertanto solo tre tipi di divergenze superficialmente divergenti (irriducibili)

(i)  divergenza quadratica (non riducibile del vuoto)

(ii)  divergenza logaritmica e quadratica

(iii)  divergenza logaritmica

Notiamo che  può dipendere solo dall'impulso  $p$ , o dal cutoff  $\Lambda$ , e quindi è al più divergente come

$$\text{tadpole} = \Lambda^2 + p^2 \ln \Lambda$$

per analisi dimensionale.

Possiamo mettere ciascuna delle divergenze divergenti in corrispondenza con un controtermine: abbiamo già visto come il controtermine  possa essere usato per rinormalizzare il vertice (ii). Notiamo ora che la divergenza (i) affetti la funzione a due punti, ossia il propagatore. Ricordiamo che nella teoria libera il propagatore ~~non ha la parte~~ ~~non ha la parte~~ ~~non ha la parte~~

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x_1 - x_2)} \frac{i}{k^2 - m^2} \quad (12)$$

Ma al di là del primo ordine in generale

Possiamo sapere la forma più generale del propagatore usando la rappresentazione spettrale di Källén-Lehman:  
 usano una risoluzione dell'identità, notando che qualunque stato nello spaz. di Fock può essere scritto come un autostato di energia  $E(\lambda)$  che corrisponde a  $(\lambda, \vec{0})$  nell'SR di riposo e a  $(E_\lambda, \vec{p})$  con  $E_\lambda = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$  in un SR generico. Ne segue che

$$1 = |0\rangle\langle 0| + \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\lambda} |\lambda, \vec{p}\rangle\langle \lambda, \vec{p}|.$$

Pertanto possiamo scrivere

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \Theta(t_1 - t_2) \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\lambda} \langle 0 | \phi(x_1) | \lambda, \vec{p} \rangle \langle \lambda, \vec{p} | \phi(x_2) | 0 \rangle$$

$$+ x_1 \Theta x_2$$

$$= \Theta(t_1 - t_2) \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\lambda} \langle 0 | e^{i p x_1} \phi(0) e^{-i p x_2} | \lambda, \vec{p} \rangle \langle \lambda, \vec{p} | e^{i p x_2} \phi(0) e^{i p x_1} | 0 \rangle$$

$$+ x_1 \Theta x_2$$

$$= \Theta(t_1 - t_2) \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\lambda} |\langle 0 | \phi(0) | \lambda, \vec{p} \rangle|^2 e^{i p(x_1 - x_2)}$$

$$+ x_1 \Theta x_2$$

$$= \sum_\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i p(x_1 - x_2)} |\langle 0 | \phi(0) | \lambda, \vec{p} \rangle|^2$$

Se si sviluppa la funzione spettrale intorno al polo abbiamo quindi

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i k(x_1 - x_2)} \frac{Z_\phi i}{k^2 - m_{phys}^2} + \text{non-phys.} \quad (13)$$

Possiamo ora porre

$$\phi = Z_\phi^{1/2} \phi_1 \quad (14)$$

$$m = Z_m m_1$$

$$g = Z_g g_1$$

Abbiamo visto come sia equivalente introdurre la rinormalizzazione in modo moltiplicativo (ridefinendo la rinormalizzazione) o additivo (aggiungendo un controtérmine).

Per capire la natura della ridefinizione della lagrangiana più generale capita in seguito alla rinormalizzazione eq. (14) conviene procedere in due passi.

Immaginiamo per primo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1) Z_\phi - \frac{1}{2} Z_\phi m^2 \phi_1^2 - \frac{g}{4!} Z_\phi^2 \phi_1^4 \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1) Z_\phi - \frac{1}{2} Z_\phi Z_m^2 m_1^2 \phi_1^2$$

$$- \frac{g_1 Z_g Z_\phi^2}{4!} \phi_1^4 \quad (15)$$

Ora definiamo

$$Z_\phi = 1 + \delta_\phi$$

$$Z_\phi Z_m^2 m_1^2 = m^2 + \delta m$$

$$Z_g Z_\phi^2 g_1 = g + \delta g$$

(16)

da cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1) - m^2 \phi_1^2 - \frac{g_2}{4!} \phi_1^4 \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{2} \delta \phi \partial_\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1 - \frac{1}{2} \delta m \phi_1^2 - \frac{\delta g}{4!} \phi_1^4$$

Le regole di Feynman associate ai tre interazioni sono quindi

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} \quad i(p^2 \delta_\phi - \delta m) \quad (18)$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \quad -i\delta\lambda$$

Vediamo quindi che le tre condizioni fisiche di normalizzazione del propagatore, posizione del polo, ampiezza di scattering, ~~distinzione~~ bastano a rimuovere le tre divergenze dei <sup>due</sup> diagrammi (i)-(ii) superficialmente divergenti. Le condizioni possono essere espresse come

$$\bigcirc = -ig (s=s_0, t=t_0, u=u_0); \quad \text{---} \bigcirc \text{---} \quad \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Notiamo che nello schema  $\overline{MS}$  le condizioni fisiche sono sostituite dalla sottrazione dei poli propri. Questo implica in particolare che la massa  $\overline{MS}$  non è la posizione del polo (e quindi non è fisicamente osservabile).

Notiamo infine che all'ordine  $g$  (1 loop) solo  $\delta\lambda$  non è banale. La ~~correzione~~ <sup>correzione</sup> a  $\delta g$  e  $\delta m$  inizia infatti a due loop, dove compare il diagramma



Notiamo che se la lagrangiana non fosse stata

normal-ordered, compirebbe anche il diagramma



Tuttavia, notiamo che esso è proporzionale a un integrale divergente che non dipende da  $p^2$ , in quanto l'integrale di loop non contiene alcuna dipendenza dall'impulso esterno. Ne segue che esso non può contribuire a  $\delta\phi$ , e il suo contributo a  $\delta m$  è banale, nel senso che la massa rinormalizzata e quella bare sono legate da uno shift che dipende solo da  $m$  (non contribuisce alla funzione  $\beta$ ).

Possiamo infine chiederci se la divergenza superficiale (per power counting) di un diagramma di Feynman coincide con quella effettiva.

Notiamo innanzitutto che possiamo essere certi che a  $D=0$  non necessariamente porta ad una divergenza logaritmica:

- 1) diagrammi a zero loop hanno  $D=0$ , e nessun integrale
- 2) possono essere cancellati: tali per cui un diagramma diverge meno della sua divergenza superficiale

Più serio è il caso di sottodiagrammi divergenti: ad esempio



$$D = 4 - 6 = -2$$

tuttavia il loop diverge. Il punto è che nella teoria delle pert. rinormalizzata esso è automaticamente reso finito.



In altri casi, le nide divergono extra oltre a quelle superficiali sono dovute a diagrammi contenuti entro altri diagrammi.

Na questo sono già sottratte da controlli anteriori precedenti.

Questo risultato, dovuto a BP42, si dimostra, inoltre, il più generale sviluppo in serie di Taylor di un diagramma di Feynman negli impulsi esteri.

Osserviamo infine che il senso della irrazionalizzabilità è a questo punto che in una teoria irrazionalizzabile le intenzioni fondamentali hanno la stessa struttura a tutte le scale.

Se questo sia o non necessario ~~per~~ per una teoria  
fondamentale è un pregiudizio teorico.

Fue notare de la  
rationalizabilitate lorina  
peste toate de interes  
sua generate ("riches" <sup>in</sup> collatz)  
conato sulla naturalitate.