

## Fisica Teorica II

Teoria quantistica dei campi: strutture e simmetrie

Stefano Forte

# I Unitarietà e analiticità

- 1 Il teorema ottico
- 2 Diagrammi di Feynman e regole di Cutkosky
- 3 Ampiezze di decadimento

4  
4  
8

# II Le identità di Ward

- 1 Simetrie e algebra delle correnti
- 2 Identità di Ward per le funzioni di Green a due punti
- 3 Derivate funzionali: identità di Ward e path integral
- 4 Esempi: QED e teoria  $\phi^4$

14  
16  
17  
20

# III Rottura spontanea di simmetria

- 1 Il teorema di Goldstone nel caso classico
- 2 Teorema di Goldstone e identità di Ward
- 3 Il potenziale efficace

25  
30  
37

# IV Invarianza di gauge

- 1 Interpretazione geometrica
- 2 Teorie di gauge non-abeliane
- 3 Quantizzazione di sistemi vincolati alla Faddeev-Kulshammer
- 4 Quantizzazione delle teorie di gauge
- 5 Il meccanismo di Higgs

45  
49  
57  
64  
77

# V Rinormalizzazione

- 1 Rinormalizzazione della QED
- 2 Rinormalizzazione e invarianza di scala
- 3 Funzione  $\beta$  e cost. d'accoppiamento running
- 4 L'equazione di Callan-Symanzik
- 5 Lo sviluppo di Wilson

84  
95  
103  
111  
116

## VI L'anomalia chirale

- 1 L'identità di Ward assiale: conservazione della corrente  $J_5^\mu$
- 2 Il vettore  $\theta$

Unitarity identities

$$- \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{q^2 - m^2 - i\epsilon} = 2\pi i \delta^{(+)}(q^2 - m^2)$$

i Disc =  $\frac{1}{2\pi\epsilon}$       Im =  $-\pi$

$$\text{Disc} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = -2\pi i \delta^{(+)}(q^2 - m^2)$$

$$\int dE \delta^{(+)}(q^2 - m^2) = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}$$

$$\sqrt{\frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}} = \sqrt{\frac{d^4k}{(2\pi)^4}} \delta^{(+)}(q^2 - m^2) \cdot 2\pi$$

$$= \sqrt{\frac{d^4k}{(2\pi)^4}} \text{i Disc} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= \sqrt{\frac{d^4k}{(2\pi)^4}} \left(-\frac{1}{2}\right) \text{Im} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

I limiti di <sup>causalità</sup> ~~causalità~~ ed analiticità

Il teorema di Liouville ci dice che la conoscenza completa delle singolarità di una funzione ci permette di ricostruirla ~~completamente~~ completamente. L'oggetto di base da considerare è l'ampiezza, u. Eg. 4 in ha. Le ampiezze hanno necessariamente poli, legati alla presenza di particelle on-shell entranti ed uscenti, e tagli, legati alla soglia di produzione di stati a più particelle: una ampiezza  $A(s)$ , dove  $s$  è un invariante cinematico qualunque ha un polo in  $s = m^2$  se è possibile produrre uno stato fisico con tale massa, ed un taglio sull'asse reale per  $s > s_0$  se  $s_0$  è la soglia per la produzione di uno stato a molte particelle.

Queste proprietà <sup>di analiticità</sup> sono del tutto generali e si possono dimostrare usando esclusivamente l'unitarietà e la <sup>località</sup> ~~causalità~~, come espresso dal principio di "cluster decompos. non", per cui la probabilità di un evento non dipende da altri eventi da esso causalmente disconnessi. Poiché la teoria dei campi implementa questi principi ~~esse~~ le proprietà di analiticità in RT seguono direttamente dal formalismo.

La Soglia legati e poli <sup>effetti</sup> Poli e soglia di riduzione

Il fatto che una particella fisica uscente si manifesti come un polo in una funzione di Green si vede immediatamente ricordando la formula di riduzione:

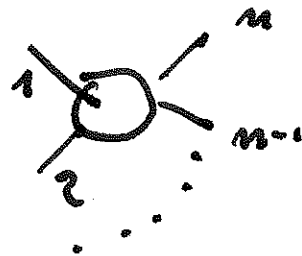
$$\langle p_1 \dots p_n | k_1 \dots k_n \rangle = \lim_{k_1^2 \rightarrow m_1^2} (k_1^2 - m_1^2) \int d^4 x_1 e^{-ik_1 x_1} \langle p_1 \dots p_n | G(x_1) | k_2 \dots k_n \rangle$$

che afferma che l'ampiezza di transizione è il residuo del polo di una funzione di Green a n-punti. <sup>(1)</sup>

Il significato fisico di questo fatto, e la ragione per cui

è più generale, può essere capita facendo una derivazione (2) della formula di riduzione, che sarà utile nel seguito e che non fa capire la fisica generalità.

Supponiamo di voler calcolare un'ampiezza con  $n$  linee esterne:

$$A_n = \text{diagramma} \quad (1)$$


Possiamo calcolare questa ampiezza in formalismo Hamiltoniano, che produce diagrammi di Feynman del tipo

$$A_n = \text{diagramma} \quad (2)$$


dove ogni linea esterna termina su una sol. classica ("f. d'onda"), senza propagatore, perché gli stati esteri hanno la forma

$$|p\rangle = b_p^\dagger \sqrt{2E} |0\rangle \quad (3)$$

e dunque l'op. di creazione si attacca direttamente agli op. di vuoto del vertice di interazione.

Alternativamente, possiamo introdurre una sorgente per il campo. In tal caso  $\int d^4x j\phi$

$$2E_j = \langle 0 | T e^{\int d^4x j\phi} | 0 \rangle$$

$$G^{(n)} = \frac{\delta^n Z}{\delta j^n} \Big|_{j=0} = \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$$

In tal caso manifestante su ogni riga esterna vi è  $\int$   
 un propagatore

$$G^{(n)} = \begin{array}{c} \swarrow S_1 \\ \circ \\ \searrow S_n \\ \swarrow S_2 \end{array} \quad (3')$$

perché ogni diff. rispetto a  $j$  produce un fattore  $S^{-1}$ ; visto che

la dip. da  $j$  è esclusivamente nella  $Z_0$  data da la legge  $Z_0 = \exp(j \int)$   
 Confrontando le espressioni (2) e (3') si  $Z_0[0]$

vede anche

$$A_n = S_1^{-1} \dots G_n S_n^{-1}$$

$$= \begin{array}{c} \swarrow S_1^{-1} \\ \circ \\ \searrow S_n^{-1} \\ \swarrow S_2^{-1} \end{array} G_n \quad (4)$$

Questa è proprio la formula di riduzione.

Il vantaggio di questo modo di vedere le cose e' che, oltre a fornire un'interpretazione della formula di riduzione, e' che esso vale qualunque sia l'operatore accoppiato alla sorgente, purché esso abbia elevato di matrice non-nullo fra il vuoto e lo stato ad una particella:

$$q \rightarrow 0$$

$$\langle 0 | \Theta(p) \rangle = e^{-ipx} f(p^2) \tag{4}$$

Notare che il coefficiente di proporzionalità e' una normalizzazione (eventualmente infinita) e tutto il resto e' fissato dall'invarianza di Lorentz. L'operatore  $\Theta(x)$  può dunque essere visto come campo interpolante per lo stato  $|p\rangle$ . Naturalmente deve portare gli stessi numeri quantici (carica, spin, ecc.).

Vediamo quindi come la presenza di poli in un'ampiezza generica sia legata ai propagatori. Se un'ampiezza e' riducibile, infatti, ossia il suo digr. di Feynman ha la struttura

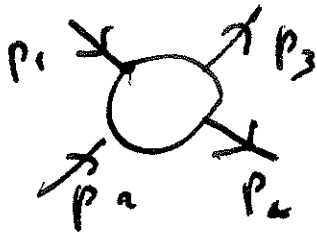


dove la linea interna corrisponde ad uno stato, come quello della Eq. (4), allora l'ampiezza ha necessariamente un polo localizzato sulla massa fisica di questo stato.

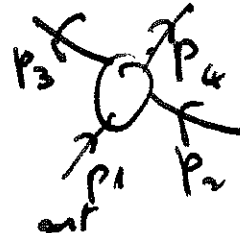
Il Taglio e l'energia statica

Quando può andare on-shell uno stato intermedio a molti corpi si ha invece un taglio, come ora dimostriamo usando il teorema statico.

La conoscenza della struttura di tagli di una  $M$  in  $\mathbb{R}^4$  è indispensabile per poter mettere in relazione diverse regioni fisiche. Infatti, notiamo che in  $\mathbb{R}^4$



e



sono collegate da  $p_2^{in} \rightarrow -p_2^{out}$   $p_3^{out} \rightarrow -p_3^{in}$  (crossing) ma questo significa  $s \rightarrow t$ .

D'altra parte, supponendo le 4 masse uguali, si ha

$$S > 4m^2$$

$$C = 2|p|^2(1 - \cos\theta) < 0$$

(CM frame:  $p_1 = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$   $p_2 = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p} \end{pmatrix}$   $p_3 = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}' \end{pmatrix}$   $p_4 = \begin{pmatrix} E \\ -\vec{p}' \end{pmatrix}$ )

Quindi crossing collega due regioni fisiche distinte

Consideriamo prima in seguito formule  
 delirino in derivate di matrice  $S$

(5)

$$S_{fi} \equiv \langle f | i \rangle \quad (2)$$

Notare che gli stati sono in rapp. di Heisenberg; in  
 rapp. di Schrodinger questo sarebbe  $S_{fi} = \langle f | S(t, -\infty) | i \rangle$   
 da cui il nome (se è l'op. di ev. temporale)

Ora delirino

$$S = \mathbb{1} + iT \quad (3)$$

per cui

$$i T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) i \pi \quad (i \rightarrow f) \quad (4)$$

dove  $\pi$  è l'elemento di matrice da cui calcolo usando  
 le regole di Feynman.

Notare che una rot. d'angolo  $e^{-i\phi} d\sigma = \frac{1}{\phi} |\pi|^2 d\phi$

Ora, l'unitarietà implica

$$S^\dagger S = \mathbb{1} \quad (5)$$

da cui

$$-i (T - T^\dagger)^\dagger = T^\dagger T \quad (6)$$

$2 \text{Im} T = T^\dagger T$

Questo è il teorema ottico

Vediamo ora come risolve a livello di derivate di matrice:

$$i (T^\dagger T)_{fi} = \sum_n \pi \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 E_n} T_{fn}^\dagger T_{ni} \quad (7)$$

dove  $T_{fn}$  è definito dall'el. di matrice con impulsi entranti  
 $i$  e usanti  $\{q_i\}$  e si è usate le relazioni dell'identità  
 con gli stati normalizzati in modo canonico: (2)

$$T_{ij} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_j) i \pi (p_i \rightarrow p_j) \quad (8)$$

Usando le eq (4) e (8) nella Eq. (6) abbiamo

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_i}} \dots \quad (9)$$

$$\leftarrow (c) \quad M^*(p \rightarrow p) M(p_i \rightarrow p_f) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f)$$

~~La stessa struttura è fatta che~~

e dove la somma <sup>su</sup>  $n$  tutti i possibili stati intermedi.

Diagrammaticamente possiamo ~~scrivere~~ la Eq. (9) come

$$2 \text{Im } i \text{ (diagramma)} = \sum \int d^4 q \left( \text{diagramma} \right) \left( \text{diagramma} \right)$$

Notiamo che a numero di sinistra c'è l'apertura "in avanti" nel senso che  $\sum_i p_i^+ = \sum_j p_j^+$  ossia  $p_{tot}^+ = p_{tot}^+$

Se scegliamo che lo stato finale sia uguale a quello iniziale (che è un più restrittivo caso particolare) allora il numero di destra è a meno del fattore di flusso, la serie d'impulso totale:

$$\text{Im } M(i \rightarrow i) = \frac{1}{2} \sigma_{tot}(p_i \rightarrow x) \quad (10)$$

La ser. d'impulso totale è quindi espressa in termini della parte immaginaria dell'apertura di scattering "in avanti in senso stretto" (ossia il suo elemento di matrice diagonale).

La parte immaginaria a sua volta è interpretata come una discontinuità; infatti per il princ. di riflessione di Schwarz

$$f(z^*) = f^*(z) \quad \text{Dunque} \quad 2 \text{Im } M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(i\epsilon) - M(-i\epsilon) = \text{Disc } M \quad (11)$$

Consideriamo ora un esempio esplicito. Lo scopo è da un lato, capire come è realizzata l'identità - ossia la relazione fra ampiezza e parte immaginaria di un diagramma a loop in un calcolo esplicito, dall'altro di trovare delle regole esplicite che permettano di realizzare questa relazione in generale.

L'idea fondamentale è la seguente: notiamo che lo spazio delle fasi per l'ampiezza  $\Gamma_{i \rightarrow f}^2 E_q$  (7) contiene integrali della forma

$$\sqrt{\frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}} = \sqrt{\frac{d^4k}{(2\pi)^4}} \delta^{(+)}(q^2 - m^2) 2\pi = \quad (12)$$

$$= + \sqrt{\frac{d^4k}{(2\pi)^4}} i \text{Disc} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Im} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (14)$$

dove nella Eq. (13) abbiamo usato l'identità distribuzionale

$$\frac{1}{q^2 - m^2 - i\epsilon} - \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = 2\pi i \delta^{(+)}(q^2 - m^2) \quad (15)$$

che si dimostra analogamente alla dimostrazione della forma covariante del propagatore di Feynman.

Ma l'ultimo passaggio corrisponde a perdere la parte immaginaria di un propagatore.

Si dimostra che questo vale in generale: la parte immaginaria di un diagramma si ottiene tagliando il diagramma

in tutti i modi possibili corrispondenti e possibili  
stati intermedi fisici, e sostituendo nelle linee

intere

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta^{(+)}(p^2 - m^2) \quad (16)$$

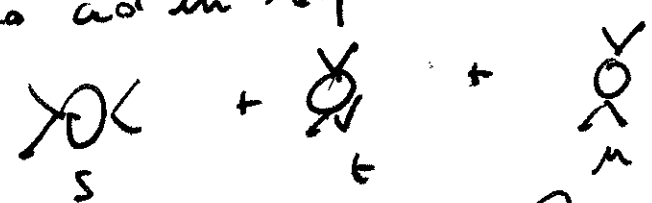
di tagliati. ~~Le regole di Feynman, un esempio esplicito.~~  
~~in corrispondenza dei tagli e degli i $\epsilon$  per un~~  
~~Diagrammi di Feynman e regole di Feynman~~

Per capire questo in modo piú esplicito, consideriamo un esempio concreto, che abbiamo giú studiato nel contesto della rinormalizzazione: lo scattering  $\phi\phi$  nella teoria  $\phi^4$ . L'osservazione chiave è che il contributo di qualunque diagramma di Feynman ad un'ampiezza è reale o non di una fase globale. Una parte immaginaria però compare quando un propagatore va on shell, perché in tal caso il propagatore  $\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$  diventa immaginario puro. (\*)  $\rightarrow$  realizza

La eq. (9) vale ordine per ordine in teoria delle perturbazioni. Ovviamente a membro destro il primo ordine non nullo è  $\lambda^2$ . In questo caso la relazione ha la forma

$$2 \text{Im } \mathcal{X} = \int d\Omega |X|^2$$

Ricordiamo che il calcolo ad un loop riceve il contributo dai tre diagrammi:



Ricordiamo inoltre che è facile vedere che i diagrammi in canale  $t$  ed in canale  $u$  non possono avere discontinuità se  $s > 4m^2$ , in quanto i propagatori interni non possono mai andare on-shell. Così non è per il diagramma in canale  $s$ : infatti si ha

$$i\pi = -i\lambda V(\frac{s}{\Lambda^2}) = -i\lambda \frac{\lambda}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \frac{\Lambda^2(p^2)}{\Lambda^2} \quad (13)$$

con  $M^2(p^2) = m^2 - p^2 x(1-x)$

Ora se  $p^2 = 0$ , si ha  $p^2 \leq 0$  e dunque  $M^2(p^2) \geq 0$ . Ma se  $p^2 > 0$  manifestamente  $p^2$  può essere grande a piacere e dunque  $M^2$  l'argomento del log può diventare negativo.

Per capire in che regime questo succede, studiamo la funzione  $f(x) = m^2 - p^2 x(1-x)$

Notiamo che il coefficiente di  $x^2$  è positivo, quindi la funzione  $f(x)$  è sempre positiva se  $|x|$  è sufficientemente grande. Pertanto,  $f(x) < 0$  se e solo se compie uno dei due casi



Gli zeri sono

$$x = \frac{p^2 \pm \sqrt{p^4 - 4m^2 p^2}}{2p^2} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \right)$$

quindi ce n'è sempre uno compreso fra 0 e 1 se  $p^2 > 4m^2$  cioè nella regione in cui lo stato finale può andare on-shell. C'è dunque un taglio che parte a  $s = 4m^2$ . Possiamo ora determinarlo esplicitamente, e arguirne verifichando il teorema ottico. Potremo farlo sviluppando il log intorno al taglio, ma preferisco un argomento più generale, che ha a che fare con l'argomento della funzione.

con  $\Pi^2(s) = m^2 - g^2 x(1-x)$  (14)

La soglia fisica di produzione è ovviamente  $s = 4m^2$ .  
 L'ampiezza ~~del~~ un loop è reale se  $\Pi^2(s) > 0$  nella  
 regione di integrazione sul parametro di Feynman.

Ma si ha che

$$\Pi^2(s) = 0 = x^2 s - x s + m^2 \quad (15)$$

ha radici

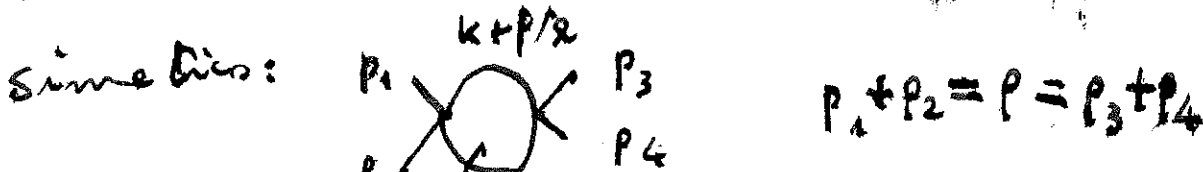
$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4m^2 s}}{2s} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \right) \quad (16)$$

Si vede pertanto che se  $s < 4m^2$  la radice quadrata  
 è immaginaria e quindi il grafico della funzione ha segno definito;  
 poiché il coeff. di  $x^2$  è positivo, ne segue che  $\Pi^2(s) > 0$  e il  
 log è reale. Quando  $s > 4m^2$  il log diventa negativo sul  
cammino di integrazione. Verifichiamo come in tal caso possiamo  
verificare la validità del teorema ottico in modo piuttosto  
generale - un argomento esplicito potrebbe essere costruito sviluppando  
la  $V(s)$  intorno al taglio.

A tal fine, ricordiamo che l'espressione iniziale per  $V(s)$  è

$$-i\lambda V(s) = \frac{k^2}{2} \sqrt{4k} \frac{1}{2\pi i \int_{\gamma} \frac{1}{[(k-\frac{p}{2})^2 - m^2 + i\epsilon][(\frac{k+p}{2})^2 - m^2 + i\epsilon]} dp} \quad (17)$$

da cui abbiamo volutamente trattata l'impulso di loop in modo

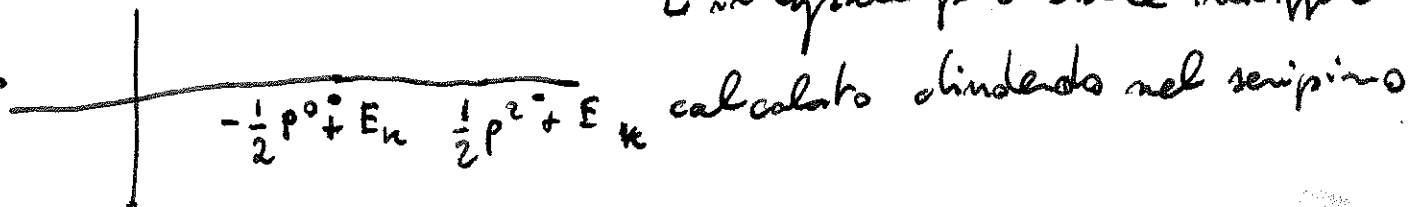


Scegliamo l'SR del  $\bar{M}$  dove  $\bar{p} = 0$ .

I tagli ovviamente iniziano nel punto in cui l'uno o l'altro dei denominatori vanno on shell. Ovviamente, l'integrande nella (17) ha quattro poli, quando (supponendo di essere nel CT, dove  $p^0 = (p^0, 0)$ )

$$k^0 = \pm \frac{p^0}{2} \pm \sqrt{\left(\bar{k}^2 + m^2 - i\epsilon\right)} = \pm \frac{p^0}{2} \pm (E_k - i\epsilon) / (18)$$

L'integrale può essere indifferenziato



superiore o inferiore. Chiudendo in quella inferiore si estraggono i due contributi a  $\pm \frac{1}{2} p^0 + E_k$ . Il taglio viene

del polo in  $-\frac{p^0}{2} + E_k$  il cui contributo all'apertatura  $\epsilon$ , sostituendo  $k_0 = \frac{p^0}{2} + E_k$  in  $\frac{1}{2} [(k_0 - \frac{p^0}{2}) + E_k] [(k_0 - \frac{p^0}{2}) - E_k] [k_0 + \frac{p^0}{2} + E_k] [k_0 + \frac{p^0}{2} - E_k]$

$$-; \lambda \sqrt{s} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} (-2\pi i)$$

$$\frac{1}{(p^0 - E_k)^2 - E_k^2} \frac{1}{2E_k}$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} \frac{(-2\pi i) 4\pi}{(2\pi)^4} \int_m^\infty dE_k E_k |\bar{k}| \frac{1}{2E_k} \frac{1}{p^0(p^0 - 2E_k)} \quad (19)$$

L'integrale in  $E_k$  ha una singolarità sul cammino di integrazione che può essere trattata notando che

$$\frac{1}{p^0 - 2E_k \pm i\epsilon} = P \frac{1}{p^0 - 2E_k} \mp i\pi \delta(p^0 - 2E_k) \quad (20)$$

Notiamo che se avviciniamo preso il contributo dell'alto polo avremo, nella (19),  $\frac{1}{p^0(p^0 - 2E_k)} \rightarrow \frac{1}{p^0(p^0 + 2E_k)}$

Per tanto la discontinuità dovuta a questa singolarità è

$$\text{disc} \frac{1}{p^0 - 2E_k + i\epsilon} = -2i\pi \delta(p^0 - 2E_k) \quad (21)$$

e dunque la parte immaginaria del diagramma è  
 $\frac{\text{Disc}}{2i}$ . Ma questo dimostra quanto volevamo  
 dimostrare, e cioè che la parte immaginaria si ottiene  
 mediante la due sostituzioni:

$$\frac{1}{\left(\frac{p+k}{2}\right)^2 - m^2} \rightarrow -2\pi i \delta\left(\left(\frac{p}{2} + k\right)^2 - m^2\right) \quad (22)$$

$$\frac{1}{\left(\frac{p-k}{2}\right)^2 - m^2} \rightarrow -2\pi i \delta\left(\left(\frac{p}{2} - k\right)^2 - m^2\right) \quad (23)$$

Completiamo il calcolo in questo modo.

Inanzitutto riscriviamo

$$i\Gamma = -i\lambda V = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k+k'-p) (2\pi)^4$$

+ non disc  
(t, u channels)  
+ non disc (17')

$$\frac{1}{(k+p/2)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k'-p/2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k_1+k_2-p) \frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4$$

dove abbiamo cambiato variabile di integrazione

$k_1 = k+p/2$ ,  $k_2 = k'-p/2$  ed abbiamo notato che  $k+k' = k_1+k_2$

Abbiamo così

N.B. di l'espone (17')  $e^{-i\lambda V}$   
 Noi abbiamo de disc  $\lambda V = 2 \text{Im} \lambda V = \sigma$   
 Ma  $2 \text{Im} \lambda V = 2 \text{Im} \frac{-i\lambda V}{i} = 2 \left( \frac{-i\lambda V}{i} \right) \frac{1}{i}$

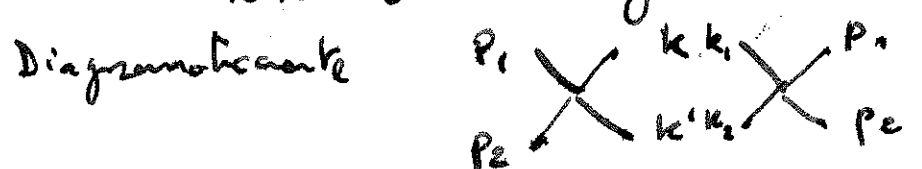
$$= \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{i^2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k_1+k_2-p) (2\pi)^4 \quad (17'')$$

A 1 fatt. di i  
fendi quorb  
iV  
2 i i  
fatti Disc = 2 i Im

$$(-2\pi i) \delta(k_1^2 - m^2) (-2\pi i) \delta(k_2^2 - m^2)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{2E(2\pi)^3 2E(2\pi)^3} |\lambda|^2 \delta^{(4)}(k_1+k_2-p) (2\pi)^4$$

Questa è proprio la serie di tutti i totali completa di spazio delle fasi <sup>massa e h.c. di fermioni</sup> con il fattore  $\frac{1}{2}$  per simmetria dello stato finale bosonico. Nota che l'angolo resterebbe invariato



andrebbe quando il vertice fosse una fusione qualunque, avrebbe da costare, in quanto abbiamo solo usato le proprietà dei propagatori da costruire il vertice al prodotto.

Abbiamo quindi verificato il teorema ottico esplicitamente per qualunque teoria scalare, per diagrammi del tipo

$$2\text{Im} \left[ \text{diagramma} \right] = \int df \left| \text{diagramma} \right|^2 \quad (25)$$

Con questo metodo si possono dimostrare le regole di Cutkosky, che affermano che la parte immaginaria di un diagramma si ottiene:

- tagliando il diagramma in tutti i modi possibili
- sostituendo in ogni taglio  $\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2)$
- sommando i contributi di tutti i tagli

Questo fornisce una dimostrazione diagrammatica del teorema ottico.

### 3. Ampiezze di decadimento

Un'applicazione interessante di questo formalismo è il calcolo del tasso di decadimento di una particella instabile.

Consideriamo infatti la <sup>la fusione di Green</sup> ~~la fusione di Green~~ a due punti

$$\text{diagramma} = \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} \quad (26)$$

dove  $-iM^2(p^2)$

Notiamo da questa scrittura che è sempre possibile per

Il calcolo esplicito (per completezza) e'

$$\text{disc} = \lambda V \int \frac{\lambda^2}{2} \frac{(-2\pi)}{(2\pi)^4} 4\pi \frac{|\vec{k}|}{2} \frac{1}{p^0} \frac{1}{2} (-2i\pi)$$

Notae: - abbiamo diviso per i perché ci interessa T e

$$S = 1 + iT$$

- c'è un fattore/2 perché l'integrale in  $dE_k$  è stato fatto con una  $\delta(p^0 - 2E_k)$ .

Notae che l'integrazione non dipende da  $E_k$ .

$$- p^0 = (p_1 + p_2)^0 = \sqrt{s} = 2E$$

Quindi

$$2\text{Im} - \lambda V = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{s}} = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^4} \frac{|\vec{k}|}{8E} = \frac{1}{16\pi} \frac{\lambda^2 |\vec{k}|}{E} \quad (*)$$

Ricordiamo che  $\phi = 8 \frac{|\vec{k}| \sqrt{s}}{2} = 8 |\vec{k}| E$

$$\sigma = \frac{1}{128\pi} \frac{\lambda^2}{E^2}$$

Dovremo trovare  $2\text{Im} - \lambda V = \phi \sigma$ . (+)

Si ha

$$\phi \sigma = \frac{8 |\vec{k}| \cancel{E} \lambda^2}{128\pi \cancel{E}^2} = \frac{1}{16\pi} \frac{\lambda^2 |\vec{k}|}{E} \quad (**)$$

Q.E.D. :  $(**) = (*)$

(\*) Ampiezza  $|\vec{k}|^2$  integrata su sp. fasi:

$$\frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\int d^3k_1 d^3k_2}{\sqrt{2E_1 2E_2} (2\pi)^6} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p) =$$

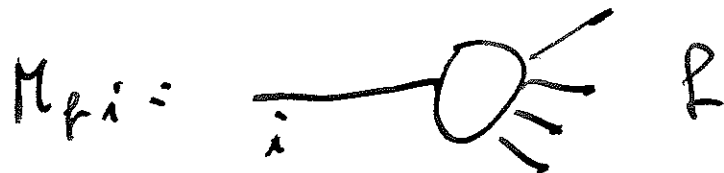
$d^3k_k = dE E$

$$= \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{d^3k k^2}{E^2} 4\pi \delta(2E - \sqrt{s}) = \frac{\lambda^2}{16\pi} \int \frac{dE k}{E} \delta(E - \frac{\sqrt{s}}{2})$$

Q.E.D. /6

### 3. Ampiezze di decadimento

Un'applicazione interessante del teorema ottico è il calcolo di un'ampiezza di decadimento, ovvero dell'ampiezza di transizione fra uno stato a una particella e uno stato a  $n$  particelle



Il teorema ottico ci dice che

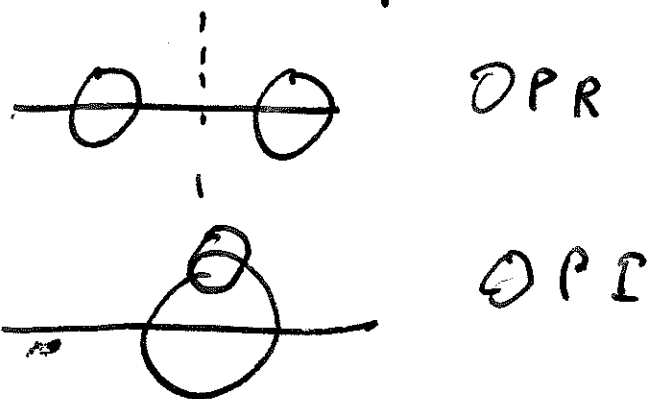
$$\int_{\mathcal{F}_f} |M_{fi}|^2 = 2 \operatorname{Im} A_{i \rightarrow i} = - \text{Cut} \quad (30)$$

dove i propagatori esteri vanno appunto valutati. Notiamo che stiamo facendo l'approssimazione di trattare la particella iniziale come uno stato asintotico (stato in) di massa ben definita, cosa possibile solo per tempi di decadimento piccoli, in un senso che ora vediamo.

Per capire che cos'è  $A_{i \rightarrow i}$  osserviamo che si tratta di una funzione a due punti, ossia di un propagatore, calcolata a tutti gli ordini perturbativi.

Questo a sua volta può essere espresso in termini della funzione a due punti  $OP I$  (one-particle irreducible), che è definita come la somma di tutti i diagrammi che non possono essere tagliati in due tagliando

una riga intera. Esempio ( $\phi^4$ )



Definiamo ora la self-energia come la somma di tutti i contributi OPI

$$i\Pi(p^2) = \text{diagramma con un cerchio hatched su una linea}$$

Possiamo scrivere il propagatore come

$$\text{diagramma con un cerchio su una linea} = \text{linea} + \text{diagramma con un cerchio hatched su una linea} + \text{diagramma con due cerchi su una linea} \quad (31)$$

$$\text{ossia } G^{(2)}(p^2) = \langle T\phi\phi \rangle =$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} + i\Pi(p^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \frac{1}{1 + \frac{\Pi(p^2)}{p^2 - m_0^2}} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + \Pi(p^2)} \quad (32)$$

dove  $m_0^2$  è la massa non rinormalizzata.

Adesso osserviamo che  $\Pi(p^2)$  possiede una parte immaginaria se la particella può decadere, per conseguenza del teor. obico. La massa della particella è la posizione del polo del propagatore completo, ossia la soluzione  $\mu$

dell'equazione

$$p^2 - m_0^2 + \Pi(p^2) = 0 \quad (33)$$

Se la particella può decadere,  $\mu$  è complesso.

Per interpretare fisicamente la parte reale e la parte immaginaria, consideriamo la trasformata

di Fourier del propagatore rispetto all'energia

$$G^{(2)}(\vec{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iEt} \frac{1}{p^2 - m_0^2 + \Pi(p^2)} \quad (34)$$

Notiamo che il denominatore ha poli quando  $p^2 = \mu^2$

per la Eq. (33), dunque nel sistema di riposo

in cui  $p = (E, \vec{0})$  si ha che

$$G^{(2)}(\vec{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{pE^2 - \mu^2} e^{-iEt} \quad (35)$$

$$\propto e^{-i \operatorname{Re} \mu t} e^{\operatorname{Im} \mu t} \quad (36)$$

Questo vuol dire che la probabilità di transizione

$$P \propto |G^{(2)}|^2 \propto e^{2 \operatorname{Im} \mu t} = e^{-\Gamma t} \quad (37)$$

con  $\Gamma = -2 \operatorname{Im} \mu$

ossia  $\operatorname{Im} \mu = -\frac{\Gamma}{2}$  (38)

è il tasso di decadimento.

Ovviamente  $\operatorname{Re} \mu = m$  è la massa on-shell

Possiamo ora tornare al teorema ottico.  
 Osserviamo innanzitutto che assumendo le linee esterne  
 abbiamo

$$A_{ii} = G^{(2)-1} G^{(2)} G^{(2)-1} \\ = G^{(2)-1} = p^2 - m_0^2 + \mathbb{T}(p^2) \quad (39)$$

Nell'approssimazione in cui possiamo considerare i  
 come uno stato arbitrario, valutiamo  $p^2$  on-shell:  
 $p^2 = m^2$ . Il teorema ottico ci dice dunque che

$$2 \operatorname{Im} \mathbb{T}(m^2) = \sum_f |M_{i \rightarrow f}|^2 \quad (40)$$

Possiamo leggere questa come un'espressione per  
 la larghezza osservata che abbiamo visto che

$$\mu = m - \frac{i}{2} \Gamma \quad (41)$$

Ma la definizione di  $\mu$  Eq. (33) implica

$$\operatorname{Im} \mu^2 = -m\Gamma = -\operatorname{Im} \mathbb{T}(\mu^2) \quad (42)$$

Ne segue che

$$\Gamma = \frac{1}{m} \operatorname{Im} \mathbb{T}(\mu^2) \quad (43)$$

e dunque  $\Gamma$  approssimando  $\mathbb{T}(\mu^2) = \mathbb{T}(m^2) (1 + O(\frac{\Gamma}{m}))$

$$\Gamma = \frac{1}{2m} \sum_f |M_{i \rightarrow f}|^2 \quad (44)$$

# I Le identità di Ward

## 1 Simetria e algebra delle correnti

In una teoria classica di campo, a una simetria

$$\begin{aligned} \varphi_i &\rightarrow \varphi_i' = U_{ij} \varphi_j \\ &= (\mathbb{1} + i \epsilon^a T^a)_{ij} \varphi_j \end{aligned} \quad (1)$$

è associata un corrente di Noether conservato

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \delta \varphi$$

Specificamente, nel caso generale di un gruppo di trasformazioni con generatori  $T^a$ ,  $a = 1, \dots, n$  abbiamo un multipletto di  $n$  correnti conservate:

$$\delta \varphi = i T^a \varphi$$

$$j_a^\mu = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} T^a_{ij} \varphi_j$$

Comuto sulle hermitiche:

$T^a_{ij}$  sono reali hermitiche

nel senso che  $T^a_{ij} = T^a_{ji}$

Invece  $J_a^\mu$  sono hermitici

nel senso che

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \right)^\dagger (i T^a_{ij})^\dagger \varphi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_j} i T^a_{ji} \varphi_i$$

Nota:  $\pi_i^\mu = -T^a_{ij} \varphi_j$

A livello quantistico, le correnti, e cariche associate, generano le trasformazioni dei campi sotto commutazione, e soddisfanno l'algebra dei generatori del gruppo.

Per esempio, abbiamo che, a tempi uguali,

$$[J_a^0(\vec{x}), J_b^0(\vec{y})] = [\pi(t, \vec{x}) i T^a \varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y}) i T^b \varphi(t, \vec{y})] \quad (5)$$

con  $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)}$  che soddisfa il commutatore canonico

Nota: che ad esempio per le rotazioni  $J_a^0$   $i T^a_{ij} = -i \epsilon^{abc} T^c_{ij}$  e  $J_a^0$  e  $J_b^0$  sono hermitiche.

$$[\pi(t, \bar{x}), \varphi(t, \bar{y})] = -i \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y}) \quad (16)$$

per cui abbiamo immediatamente

$$[J_0^a(t, \bar{x}), J_0^b(t, \bar{y})] = i \int d^3x' \pi(t, \bar{x}') [T^a, T^b] \varphi(t, \bar{y}') \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y}') \quad (17)$$

2023 trova  
forando i  
comutatori per bene

dove abbiamo supposto

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (18)$$

e usato  $J_0^a = i \int d^3x \pi T^a \varphi$   
(come in meccanica quantistica, dove  $[L_i, L_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} L_k$ )

Inoltre

$$[J_0^a(t, \bar{x}), a_i(t, \bar{y})] = i [\pi_m(t, \bar{x}) T_{mm}^a \varphi_m(t, \bar{x}), a_i(t, \bar{y})] \\ = \int d^3x' \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y}') T_{im}^a \varphi_m(t, \bar{y}') \\ = -i \int d^3x' \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y}') \delta \varphi(t, \bar{y}') \quad (19)$$

Le relazioni di commutazione (17) e (19) (algebra delle commutazioni) garantiscono che le cariche associate alle correnti di Noether generano le simetrie sotto commutazione a livello quantistico: se

$$Q^a = \int d^3x j_0^a(\bar{x}, t) \quad (20)$$

da (17) implica

$$[Q^a, Q^b] = i f^{abc} Q^c \quad (21)$$

e da (19)

$$[Q^a, \varphi] = -i\delta^a \varphi \quad (22)$$

Notare che tutti i commutatori sono calcolati a tempi uguali.

Notare anche che le cariche, se conservate, non dipendono dal tempo. Notare infine che le relazioni di com. che inducono i commutatori  $[Q^a, \varphi]$  delle correnti sono più complicate e coinvolgono termini di ordine superiore a 2.

2. Identità di Ward: fusione di Green a due punti (vedi di Shuigel)

Il fatto che le cariche generino la trasf. dei campi sotto commutazione implica immediatamente che tutte le simmetrie classiche sono ereditate dalla teoria quantistica alla Heisenberg (che soddisfa le eq. classiche del moto in forma canonica), ossia dalla teoria di campo.

Abbiamo in particolare che

$$[Q, H] = 0 \quad (23)$$

implica  $\frac{dQ}{dt} = 0$

a livello operatoriale, visto che  $i[H, Q^a] = \frac{d}{dt} Q^a$

Notiamo inoltre che le rel. di commutazione canoniche implicano la ~~variazione~~ <sup>variazione</sup> ~~locale~~ <sup>locale</sup>  $i[\mathcal{H}(\bar{x}), Q^a] = \int J_a^\mu(\bar{x})$  (24)

dove  $\mathcal{H}(\bar{x}) = \mathcal{O}^{00}(\bar{x})$

è la densità di Hamiltoniana. La dim. è lasciata per esercizio ed è analoga alla dim. del teorema di Noether. (Vedere Jackson, sect 2.01, ex. 24)

Ne segue che se la Hamiltoniana è invariante, allora a livello operatoriale  $\int J_a^\mu = 0$  (26)

Si ha quindi che

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} G^{\mu}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle T J^\mu(x) \varphi(y) \rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \Theta(t_x - t_y) \langle J^\mu(x) \varphi(y) \rangle + \Theta(t_y - t_x) \langle \varphi(y) J^\mu(x) \rangle \right] =$$

$$= \langle T \partial_\mu J^\mu(x) \varphi(y) \rangle +$$

$$+ \delta(t_x - t_y) \langle [J^0(x), \varphi(y)] \rangle =$$

$$= -\delta^{(4)}(x-y) \langle \delta \varphi(y) \rangle \quad (25)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la Eq. (19).

Notiamo che lo stesso argomento vale per un operatore qualunque: si ha cioè

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle T (J^\mu(x) O(y)) \rangle =$$

$$= -\delta^{(4)}(x-y) \langle [J^0(x), O(y)] \rangle \quad (26)$$

### 3. Identità di Wale Path Integral

La generalizzazione al caso di funzioni di Green con  $n$  operatori può essere ottenuta con metodi analoghi, ma in un contesto lagrangiano e più compatto ed illuminante.

Consideriamo l'effetto di una trasformazione di similitudine su una funzione di Green

Nel formalismo funzionale si ha che

$$G_m(x_1, \dots, x_n) = \langle T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int D\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{iI} \quad (27)$$

Ora consideriamo una trasformazione eq. (3) che sia una simmetria della teoria classica, e supponiamo di considerare una trasformazione locale, tale cioè che

$$\varphi' = \left( 1 + i \epsilon^a(x) T^a \right) \varphi \quad (28)$$

Vediamo che sotto tale trasformazione la variazione della Lagrangiana è

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \partial_\mu \varphi \quad (29)$$

Ma

$$\begin{aligned} \delta \varphi &\equiv \epsilon^a T^a \varphi \quad \text{in cui si separa} \\ &\delta \varphi \text{ in } \delta^a \varphi(x) \delta^a \varphi(x) \\ \delta \partial_\mu \varphi &= \partial_\mu (i \epsilon^a T^a \varphi) = \partial_\mu \epsilon^a i T^a \varphi + \epsilon^a i \partial_\mu T^a \varphi \\ &= \partial_\mu \epsilon^a \delta \varphi^{(a)} + \epsilon^a \partial_\mu \delta \varphi^{(a)} \end{aligned} \quad (30)$$

~~dove  $\delta^a \varphi$  è indicato con  $\delta^a \varphi$  la variazione di  $\varphi$  per parametro  $a$ .~~

$$\text{Quindi} \quad \delta \mathcal{L} = \partial_\mu \epsilon^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi^a = \partial_\mu \epsilon^a J_\mu^a \quad (31)$$

con  $J_\mu^a$  dato dalla eq. (2), avendo usato l'invarianza quando  $\epsilon$  è costante. Ora eseguiamo la trasformazione eq. (28) sul path integrale.

Se la misura di integrazione è invariato sotto la trasformazione (cosa che potrebbe essere ricavata dalla regolarità) ...  
 La funzione di Green deve essere invariante sotto la trasformazione che è una riparametrizzazione:

$$\begin{aligned}
 ZG_n(x_1, \dots, x_n) &= Z'G'_n(x_1, \dots, x_n) = \\
 &= \int D\phi' e^{i\int \mathcal{L}(\phi')} \phi'(x_1) \dots \phi'(x_n) \\
 &= \int D\phi e^{i\int \mathcal{L} + i\int d^4x \partial_\mu \varepsilon J^\mu} (\mathbb{1} + i\varepsilon T^a) \phi(x_1) \dots (\mathbb{1} + i\varepsilon T^a) \phi(x_n) \quad (32)
 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passo abbiamo usato la trasformazione dei campi in forma infinitesimale.

Al primo ordine in  $\varepsilon$  (e nelle sue derivate, cioè al primo ordine di uno sviluppo funzionale)

$$\begin{aligned}
 Z'G' &= \int D\phi e^{i\int \mathcal{L} + i\int d^4x \partial_\mu \varepsilon J^\mu} \left[ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_i \varepsilon \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_i) \right] \quad (33)
 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo termine si intende che la variazione si applica ad uno dei campi alla volta.

Impone

$$Z'G' - ZG = 0$$

e calcolando la derivata funzionale rispetto a  $\varepsilon(x)$  si ha

immediatamente che

$$\partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(x) \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \rangle =$$

$$= -i \left\langle \sum_i \delta^{(4)}(x_i - x) T \delta \varphi(x_i) \prod_{j \neq i} \varphi(x_j) \right\rangle \quad (34)$$

che generalizza la eq. (25) al caso di  $n$  campi.  
 (Nota che la deriv. funzionale produce un  $\delta$ , la deriv. della  $\delta$  è fra i due  
 4. Conservazione della carica in QED e in  $\varphi^4$  scalare e spinorile  $\rightarrow$

Diamo ora un semplice esempio di applicazione delle id. di  
 Ward: la conservazione della carica. accoppiato al campo elettromagnetico  
 Consideriamo il caso di un campo scalare carico, avente

Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^\dagger D_\mu \varphi - m^2 |\varphi|^2 \quad (35)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$$

Ricordiamo che la corrente di Noether conservata sotto

$$\varphi' = e^{i\theta} \varphi = (1 + i\theta) \varphi \quad (36)$$

$$j^\mu = i \left( D_\mu \varphi^\dagger \varphi - D_\mu \varphi \varphi^\dagger \right) \quad \text{in (37)}$$

termini della quale la Lagr. Eq. (35) si può scrivere come  
 L'identità di Ward soddisfatta da questa corrente è particolarmente  
 interessante nel caso di una corrente e due campi.

Si ha

$$\partial_\mu \langle T j^\mu(x) \varphi(y) \varphi^\dagger(z) \rangle =$$

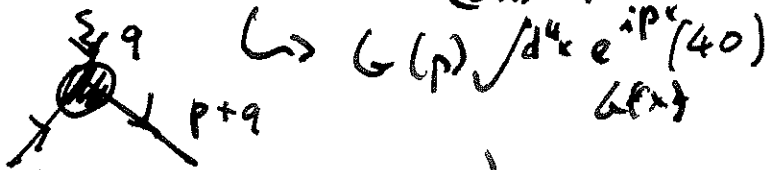
$$= \delta^{(4)}(x-y) \langle T \varphi(y) \varphi^\dagger(z) \rangle - \langle T \varphi(x) \varphi^\dagger(z) \rangle \delta^{(4)}(x-z) \quad (38)$$

Consideriamo ora una trasefornata di Fourier: definiamo

$$G_p^{(3)}(p, q) = \int d^4x d^4y e^{-iqx} e^{-ipy} \langle T \hat{\varphi}(x) \varphi(y) \varphi^\dagger(0) \rangle \quad (39)$$

avendo arbitrariamente posto  $z=0$  (cosa sempre possibile per invarianza per traslazioni).

Possiamo interpretare diagrammaticamente  $G(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} e^{-ipx} e^{-ipy}$

•  $G^{(3)}(p, q) =$  

(alternativa de cisore propagata sulle gambe esterne)

(Notiamo che i fattori di trasf di Fourier sono proprio quelli che rimuovono i fattori di onda piana dalle usuali regole di Feynman):

come  $\varphi(x) \varphi^\dagger(0) e^{ipx}$  (Nota: anche da  $G^{(2)}$  in vertice senza propagatori esterni)  
 come vertice generalizzato (fusione a tre punti).

Abbiamo così

$$-iq^M \cdot G_p^{(3)}(p, q) = \int d^4x e^{-i(p+q)x} \langle T \varphi(x) \varphi^\dagger(0) \rangle$$

$$= \int d^4x e^{-ipx} \langle T \varphi(x) \varphi^\dagger(0) \rangle \quad (41)$$

Ricordando che

$$G^{(2)}(x, y) = G^{(2)}(x-y) = \langle T \varphi(x) \varphi^\dagger(y) \rangle \quad (42)$$

è il propagatore (invariante per traslazioni) l'identità di Ward prende la forma

N.B. si avrebbe  $G^{(2)}(-p+q) - G^{(2)}(-p)$  (43) ma  $G^{(2)}$  dipende da  $p^2/2$

$$-iq^M G_p^{(3)}(p, q) = G^{(2)}(p+q) - G^{(2)}(p)$$

dove abbiamo definito

$$G^{(2)}(p) = \int d^4x e^{-i p(x-y)} G^{(2)}(x-y) \quad (44)$$

Notiamo che questo risultato vale a tutti gli ordini perturbativi.

Al primo ordine il risultato è facile da verificare moltiplicando a sinistra e a destra per l'inverso del propagatore:

$$\begin{aligned} -i q^\mu G^{(2)-1}(p+q) G_\mu^{(2)}(p,q) G^{(2)-1}(p) &= \\ &= G^{(2)-1}(p) - G^{(2)-1}(p+q) \end{aligned} \quad (45)$$

Ricordando che

$$G(p) = \frac{ti}{p^2 - m^2 + ti\epsilon} \quad (46)$$

si ha

$$ti q^\mu G^{(2)-1} G_\mu^{(2)} G^{(2)-1} =$$

$$= +i (q^2 + 2p \cdot q) = q^2 \quad (47)$$

Ma ora notiamo che  $G^{(2)-1} G_\mu^{(2)} G^{(2)-1} \equiv \bar{\Gamma}_\mu$  è il vertice generalizzato, e quindi  $i p^\mu \bar{\Gamma}_\mu$

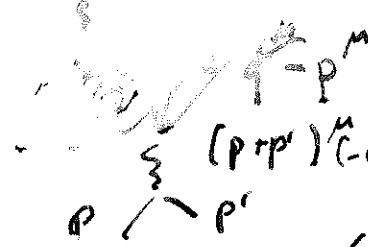
$$q^\mu \bar{\Gamma}_\mu = q^\mu (q_\mu + 2p_\mu) \quad (48)$$

ossia  $+i \bar{\Gamma} = -i(p+p')$

in accordo con la regola di Feynman

(ricorda che c'è un fattore  $i$  in più)

in quell'ordine



Consideriamo ora la QED - In questo caso

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - e \not{A} + m) \psi \quad (49)$$

La corrente di Noether conservata sotto

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta} \psi \quad \delta\psi = i\theta\psi \quad (50)$$

$$e^- \quad j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (51)$$

Di nuovo, ricaviamo l'id. di Ward per la corrente a tre punti:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle T j^\mu(x) \bar{\psi}(y) \psi(z) \rangle &= \\ &= \delta^4(x-z) \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) \rangle - \langle \bar{\psi}(x) \psi(z) \rangle \delta^4(x-y) \end{aligned} \quad (52)$$

Passando come prima allo spazio degli impulsi abbiamo, con esattamente gli stessi passaggi N.B. qui c'è un segno - perché ora  $G^{(2)}(-p) = -G^{(2)}(p)$

$$-i q^\mu G_\mu^{(2)}(p, q) = \left( G^{(2)}(p) - G^{(2)}(p+q) \right) \quad (53)$$

ossia

$$i q^\mu P^\mu(p, q) = \left( G^{(2)}(p+q) - G^{(2)}(p) \right) \quad (54)$$

Ancora una volta, la verifica al primo ordine perturbativo è

$$\begin{aligned} \text{immediata:} \quad i q^\mu P^\mu &= \frac{1}{i} \left[ (\not{p} + \not{q} - m) - (\not{p} - m) \right] \\ &= \frac{1}{i} \not{q} \end{aligned} \quad (55)$$

da cui

$$i P^\mu = -i \delta^\mu$$

in accordo con la regola di Feynman.

Osserviamo immediatamente che la validità di questa relazione a tutti gli ordini ha importanti implicazioni per la rinormalizzazione. Infatti abbiamo visto come in generale si debba dare una prescrizione di rinormalizzazione per la costante di accoppiamento, che fissi una costante  $Z_1$  che rinormalizza il

Vertex 
$$\lim_{q \rightarrow 0} P^M(p, p+q) \rightarrow Z_1^{-1} \gamma^M \quad (49)$$

ed una costante di rinormalizzazione per la funzione d'onda, fissata dalla condizione di residuo al polo

$$G^{(e)} \underset{p^2 \rightarrow m^2}{\sim} \frac{iZ_2}{p - m} \quad (50)$$

Ma vediamo che nei pressi del mass-shell di  $p_1$  e con  $q \rightarrow 0$ , l'id di Ward (50) implica

$$-i q \frac{1}{Z_1} = -i q \frac{1}{Z_2} \quad (51)$$

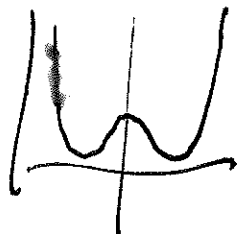
ossia 
$$Z_1 = Z_2$$

a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni

### III Rottura spontanea di simmetria

#### 1. Il teorema di Goldstone nel caso classico

La rottura spontanea di simmetria si ha tutte le volte che lo stato fondamentale di una teoria non è invariante sotto una simmetria della teoria stessa. Esempio: doppia buca simmetrica. Lo stato fond. non è invariante



per parità. Se la simmetria è continua, in questa situazione compaiono eccitazioni di massa nulla,  $\phi$  in meccanica classica e in QFT (ma non in  $\mathbb{R}^d$ ).

Vediamo prima il caso classico. Supponiamo di avere un potenziale di  $n$  campi,  $V(\phi)$  dove  $\phi_i$  è un multipletto di campi, invariante sotto

$$\phi' = U\phi = (\text{espilata})\phi \quad (1)$$

Supponiamo che il potenziale sia minimo per un certo  $\bar{\phi}$  costante

$$\phi = \bar{\phi}, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \right|_{\phi = \bar{\phi}} = 0 \quad (2)$$

~~Ma se~~ Nature de vogliamo  $\phi$  costante per  $\bar{\phi}$  non rompe l'in. di Lorentz.

Supponiamo ora che  $V$  non lavori  $\bar{\phi}$  invariato. Questo

significa che esistono dei generatori  $T^a$ , con  $a = 1, \dots, n$ ;

$1 \leq n \leq \pi$  dove  $\pi$  è il rango del gruppo di

simmetria,

con  $U(\theta) = \exp i\theta T^a$  "rotazione" attorno all'"a"-origine

$$\bar{\phi}' = U_a \bar{\phi} \neq \bar{\phi} \Rightarrow T^a \bar{\phi} \neq 0 \quad (?)$$

Naturalmente, lo spazio ricoperto dagli  $\bar{\phi}'_a$  ha <sup>in genere</sup>  $n$  dimensioni, visto che è il sottospazio dello spazio dei  $\phi$  ortogonale a  $\bar{\phi}$  (la sua <sup>normale</sup> è  $\bar{\phi}$ ), e il piccolo gruppo di  $\bar{\phi}$ .  
 L'invarianza di  $V$  sotto  $\phi \rightarrow \phi'$  implica che

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ij} \phi_j = 0 \quad (4)$$

per ogni  $a$  e per qualunque  $\phi$

Facendo la derivata della Eq. (4)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} T^a_{ij} \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ik} = 0 \quad (5)$$

ma valutando la Eq. (5) in  $\phi = \bar{\phi}$  il 2° termine si annulla, e si ha

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \right|_{\phi = \bar{\phi}} T^a_{ij} \bar{\phi}_j = 0 \quad (6)$$

La  $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}$  è la matrice di massa dei campi attorno

a  $\phi = \bar{\phi}$ . La eq. (6) dice che questa matrice ha tanti <sup>autovettrici associati ad autovalori nulli</sup> <sup>quanti</sup> sono i vettori  $T^a \bar{\phi}$  nulli e linearmente indipendenti, cioè tanti quanti sono i generatori di  $G$  non fermati invariato il vettore. <sup>Notiamo che la matrice di massa è la matrice di deriv. seconde del ~~potenziale~~ potenziale sempre per campi costanti</sup>

Si dice che il numero di simmetrie rotte è pari al numero di questi generatori. I generatori restanti formano la simmetria

veridica dopo la rottura. Questo risultato è noto come  
teorema di Goldstone (nel caso classico).

Per rendere concreto il teorema, consideriamo un esempio classico:  
 il modello  $\sigma$  lineare, proposto da Nambu e Jona-Lasinio  
 come teoria dell'interazione pione nucleone.

In questa teoria, prima della rottura vi è una simmetria  $SU(2)_L \times$   
 $SU(2)_R$ . Dopo la rottura il sottogruppo  $SU(2)_A$  è rotto, mentre  
 il sottogruppo diagonale  $SU(2)_V$  resta intatto. La rottura permette  
 di assegnare <sup>una</sup> massa ai fermioni, che è appunto incompatibile  
 con una simmetria assiale. Il prezzo da pagare è la generazione  
 di tre bosoni di Goldstone a massa nulla (pioni).

La Lagrangiana del modello  $\sigma$  è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - g \bar{\psi} (\sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \\ & + \frac{1}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma + \vec{\pi}^2)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

obve  $\tau^i$  sono matrici di Pauli, dunque  $\vec{\tau}$  pede-  
 agiscono su uno spazio interno (isospin).

La simmetria del modello si espone definendo la  
 matrice di campi

$$\Sigma = \sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \quad (8)$$

in termini della quale la Lagrangiana diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - g (\bar{\psi}_L \Sigma \psi_R + \bar{\psi}_R \Sigma^\dagger \psi_L) + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial_\mu \Sigma) + \frac{1}{4} \mu^2 \text{tr} \Sigma^\dagger \Sigma - \frac{\lambda}{16} (\text{tr} \Sigma^\dagger \Sigma)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

dove abbiamo definito  $\psi_L = \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi$  e

fatto uso di

$$\hbar \tau^i \tau^j = \delta^{ij} \quad (10)$$

Si vede immediatamente che la Lagrangiana è invariante sotto

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = U_R \psi \quad (11)$$

$$\Sigma \rightarrow \Sigma' = U_L \Sigma U_R^\dagger \quad (12)$$

Conviene definire anche le trasformazioni vettoriali e assiali, ponendo

$$\theta_R = \frac{\theta_V + \theta_A}{2} \quad (13)$$

Per ricavare le correnti di Noether occorre determinare la trasformazione dei campi  $\psi_L$  (ovvia) e dei campi  $\sigma$  e  $\pi$ , che si trova notando che

$$\pi^i = \frac{1}{2} \hbar \Sigma \tau^i \quad (14)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \hbar \Sigma \quad (15)$$

da cui segue che

$$\delta_V \sigma = 0$$

$$\delta_V^a \pi^b = -i \varepsilon^{abc} \pi^c$$

$$\delta_A^a \sigma = -i \pi^a$$

$$\delta_A^a \pi^b = i \sigma \delta^{ab}$$

(16)

che implica

$$j_\nu^A = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \psi + \varepsilon^{abc} \pi^b \partial_\nu \pi^c \quad (17)$$

$$j_\nu^5 = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi + \pi^a \partial_\nu \sigma - \sigma \partial_\nu \pi^a \quad (18)$$

La rottura spontanea di simmetria si realizza supponendo che lo stato fondamentale della teoria classica sia

$$\begin{cases} \bar{\pi}_0 = 0 \\ \sigma_0 = v \end{cases} \quad (19)$$

dove  $v$  è determinato dalla condizione

$$v^2 = x$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 ; \quad V(x) = \frac{\mu^2}{2} x - \frac{\lambda}{4} x^2 \quad (20)$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (21)$$

Possiamo riscrivere la teoria classica in termini del campo "fisico" che contiene le piccole fluttuazioni intorno allo stato fondamentale

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0 : \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i \not{\partial} - g v) \psi + \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \tilde{\sigma} \partial_\nu \tilde{\sigma} - 2 \mu^2 \tilde{\sigma}^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \partial_\nu \tilde{\pi} \partial_\nu \tilde{\pi} - \frac{1}{2} g^2 v^2 \tilde{\pi}^2 - \lambda v \tilde{\sigma} (\tilde{\sigma} + \tilde{\pi}^2) \\ & - \frac{\lambda}{4} (\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\pi}^2)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Vediamo che la rottura spontanea della simmetria chirale ha fatto acquistare massa al campo fermionico, producendo tre bosoni di Goldstone (comparsa massa)  $\pi$ .

Vediamo inoltre che la simmetria di parità, che era  $SU(2) \times SU(2)$  e rotta mentre sopravvive come simmetria l'insieme di traslazioni che lasciano invariato lo stato fondamentale, ossia il campo  $(\bar{\pi}_0, \sigma_0)$  Eq. (19).

Manifestamente, queste sono le trasformazioni  $V_i$  per cui  $\partial_L = \partial_R$  dinodoché

$$U_L^\dagger \not{1} \sigma U_R = U_R^\dagger U_R \not{1} \sigma. \quad (24)$$

# Noether current for the $\sigma$ model

$$\begin{aligned} \tau^a \tau^b &= 2\delta^{ab} \\ \{\tau^a, \tau^b\} &= 2\delta^{ab} \\ [\tau^a, \tau^b] &= 2i \epsilon^{abc} \tau^c \end{aligned}$$

$$\Sigma \rightarrow \Sigma' = U_L \Sigma U_R^\dagger \quad ; \quad \psi_L \rightarrow U_L \psi = \psi'$$

$$V \Rightarrow U_L = U_R \quad A = D \quad U_L = U_R^\dagger$$

$$U = 1 + i \frac{\epsilon^a \tau^a}{2} \quad \Sigma = \sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}$$

$$V \quad \delta \Sigma = \left( 1 - i \frac{\epsilon^a \tau^a}{2} \right) \left( \sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \right) \left( 1 + i \frac{\epsilon^a \tau^a}{2} \right) - \Sigma$$

$$\delta_V \sigma = 0$$

$$= - \frac{1}{2} i \epsilon^a [\tau^a, \tau^b] \pi^b = \frac{2i}{2} \epsilon^{abc} \epsilon^a \pi^b \tau^c$$

$$\delta_M \pi^b = -\epsilon^{abc} \pi^c$$

$$\left( \text{scalars} \right) j_a^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Sigma} \delta \Sigma = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \Sigma^\dagger i \epsilon^{abc} \pi^b \tau^c \right) =$$

$$= \frac{i}{2} \partial_\mu \pi^a \tau^a \tau^b \tau^c \epsilon^{abc} \pi^b =$$

$$= - \frac{1}{2} \delta^{ic} \partial_\mu \pi^a \epsilon^{abc} \pi^b = -\epsilon^{abc} \pi^b \partial_\mu \pi^c$$

$$= \epsilon^{abc} \partial_\mu \pi^b \pi^c$$

$$\text{fermions } j_a^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} \delta \psi = \bar{\psi} i \gamma^\mu \tau^a \psi = -\bar{\psi} \tau^a \gamma^\mu \psi$$

$$j_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \psi + \epsilon^{abc} \pi^b \partial_\mu \pi^c \quad (\text{changing sign})$$

$$\begin{aligned}
 A \quad \delta \Sigma &= \left( \mathbb{1} + i \frac{\epsilon^a}{2} \tau^a \right) (\sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \left( \mathbb{1} + i \frac{\epsilon^a}{2} \tau^a \right) - \Sigma \\
 &= i \frac{1}{2} \left\{ \tau^a, \sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \right\} = \\
 &= \frac{i}{2} 2 \sigma \tau^a - \frac{i}{2} 2 \delta^{ab} \pi^b \\
 &= i \sigma \tau^a - \pi^a \rightarrow \begin{aligned} \delta_A^a \sigma &= -\pi^a \\ \delta^a \pi^b &= \sigma \delta^{ab} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Sigma} \delta^a \Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_a \left( \partial_\mu \Sigma^\dagger \left( i \sigma \tau^a - \pi^a \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_a \left[ \left( \partial_\mu \sigma - i \partial_\mu \pi^b \tau^b \right) \left( i \sigma \tau^a - \pi^a \right) \right] =$$

$$= - \partial_\mu \sigma \pi^a + \partial_\mu \pi^a \sigma$$

famous  $j_a^\mu = -\bar{\psi} \tau^a \gamma^\mu \gamma_5 \psi$

$$j_a^\mu = \bar{\psi} \tau^a \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \pi^a \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \pi^a$$

## 2. Teorema di Goldstone e identità di Ward

In meccanica quantistica, la rottura <sup>spontanea</sup> di simmetria è rimossa dal principio di sovrapposizione. Per esempio, nel caso della doppia buca, lo stato fondamentale è una combinazione lineare delle due soluzioni centrate in ciascuna delle due buche. L'effetto tunnel separa l'energia della combinazione pari e di quella dispari. Ma in QFT l'altezza della barriera è sempre infinita, non c'è effetto tunnel, e lo stato fondamentale sempre spontaneamente ha simmetria. Dimostriamo ora usando le identità di Ward che in teoria <sup>quantistica</sup> campi vale il teor. di Goldstone nel senso che in presenza di simmetrie rotte spontaneamente corrisponde poli a massa nulla nei propagatori.

In QFT, l'ipotesi di non-invarianza dello stato fondamentale si esprime dicendo che esiste un operatore avente VEV non-nullo che non è invariante sotto la trasformazione.

Supponiamo cioè che esista  $\Omega^i$  tale che

$$\langle 0 | \Omega^i | 0 \rangle = f^i \neq 0 \quad (16)$$

$$U \Omega^i U^{-1} = R_{ij} \Omega^j$$

con  $R_{ij} f^j \neq f^i$ .

Infatti, la (16) implica che

$$f_{ij} = \langle 0 | U U^{-1} \Omega^i U U^{-1} | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | U \Omega^j U^{-1} | 0 \rangle R_{ij} \quad (17)$$

e quindi ne segue che  $U | 0 \rangle \neq | 0 \rangle$  perché se per assurdo  $U | 0 \rangle = | 0 \rangle$

allora  $f_{ij} = R_{ij} f^j$ , ~~non~~ <sup>non</sup> ~~potrebbe~~ <sup>potrebbe</sup> ~~essere~~ <sup>essere</sup> ~~non~~ <sup>non</sup> ~~zero~~ <sup>zero</sup>, Notiamo che se un operatore è fatto  $\int \phi$

non esistesse, la non-invarianza del vuoto sarebbe inosservabile. Più precisamente, se per tutti gli operatori per cui  $\delta\Omega \neq 0$  avessero VEV nullo questo vorrebbe dire che se  $\langle \Omega^i \rangle \neq 0$  allora  $\delta\Omega = 0$ . Ma ciò significa che qualunque osservabile del vuoto è invariante sotto la simmetria, ossia il vuoto è invariante. Quindi  $\langle \Omega^i \rangle \neq 0$  con  $\delta\Omega^i \neq 0$  è condizione necessaria e sufficiente per la noninvarianza del vuoto, cioè per la rottura spontanea di simmetria.

Consideriamo ora le funzioni a due punti

$$G_p^{i(2)}(x, y) = \langle 0 | T j^\mu(x) \Omega^i(y) | 0 \rangle \quad (18)$$

dove  $\Omega^i$  è un operatore associato alla rottura spontanea di simmetria.

• Nello spazio degli impulsi

$$G_p^{i(2)}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p(x-y)} \sigma^i(p^2) p^\mu \quad (19)$$

Abbiamo quindi l'identità di Ward

$$\partial_\mu G_p^{i(2)}(x, y) = -i \delta^{(4)}(x-y) \langle \delta\Omega^i \rangle \neq 0 \quad (20)$$

Nota che l'identità di Poincaré (traslazioni) ~~non~~ implica che  $\langle \delta\Omega^i \rangle$  deve essere una costante. Nello spazio degli impulsi questo vuol dire che (indipendentemente da  $x$ )

$$p^\mu \sigma^i(p^2) = \langle \delta\Omega^i \rangle \neq 0 \quad (21)$$

Ma ciò vuol dire che  $\sigma^i(p^2)$  ha un polo a  $p^2 = 0$ .

Questo significa che possiamo scrivere una formula di riduzione per una funzione a due punti contenente il campo  $\Omega$  e la corrente  $j$ , in cui il campo  $\Omega$  viene dal vuoto ma stato che si accoppia alla corrente, e che deve essere a massa nulla.

Abbiamo infatti

$$\partial_\mu \langle 0 | T j^\mu(x) \Omega | 0 \rangle = i k_\mu \langle 0 | j^\mu(x) \Omega \rangle S_\Omega(k^2) \quad (22)$$

Ma  $\langle 0 | j^\mu(x) \Omega \rangle = k^\mu f_\Omega$  (23)

dove  $f_\Omega$  è la "costante di decadimento" di  $\Omega$ ,  
ossia, se  $|\Omega\rangle$  è aff-chell,  $\langle 0 | j^\mu(x) \Omega \rangle = k^\mu f(k^2)$ ,

$$f_\Omega = f(m_\Omega^2).$$

Sostituendo la (23) nella (22) troviamo

$$= i k^2 f_\Omega S_\Omega(k^2) = \text{cost} \neq 0 \quad (24)$$

ossia  $S_\Omega(k^2) = \frac{i \text{cost}}{k^2}$  (25)

e dunque il propagatore di  $\Omega$  è a massa nulla.

Vediamo ora l'applicazione al modello  $\sigma$ , ora in versione quantistica.

L'operatore non invariante è il campo  $\underline{\sigma}$ :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \langle \sigma \rangle \neq 0$$

Consideriamo l'identità di Ward

$$\partial_\mu \langle 0 | j_5^\mu a(x) \pi^b(y) | 0 \rangle = -i \delta^{(4)}(x-y) \langle 0 | \delta_5^a \pi^b | 0 \rangle \quad (24)$$

Ricordiamo che la variazione di  $\pi^b$  sotto rotazioni assiali è  $\epsilon^b \delta^{ab}$ , e dunque

$$\partial_\mu \langle 0 | j_5^\mu a(x) \pi^b(y) | 0 \rangle = + \delta^{(4)}(x-y) \delta^{ab} \langle 0 | \sigma | 0 \rangle \quad (25)$$

La formula di riduzione dice che

$$\partial_\mu \langle 0 | j_5^\mu a \pi^b | 0 \rangle = \frac{1}{i} \langle 0 | j_5^\mu a | \pi^b \rangle \dot{S}_\pi(p^2) \quad (26)$$

Ma se

$$\langle 0 | j_5^\mu a | \pi^b \rangle = i p_\mu f_\pi \delta^{ab} \quad (27)$$

troviamo 
$$+ i \dot{S}_\pi(p^2) p^2 f_\pi \delta^{ab} = + i \langle 0 | \sigma | 0 \rangle \delta^{ab} \quad (28)$$

i.e. 
$$\dot{S}_\pi(p^2) = \frac{+i v / f_\pi}{p^2} \quad (29)$$

che è proprio il propagatore di un pione a massa nulla. Prendendo l'elemento di matrice fra stati con lo stesso numero di particelle si hanno relazioni di questo tipo (soft pion theorems). In caso particolare significa che mette in relazione la rottura spontanea di simmetria con la ~~non~~ generazione di una massa per i fermioni, e la relazione di Goldberger-Treiman.

La relazione di Goldberger-Treiman mette in relazione la massa del leone con i parametri che caratterizzano la rottura spontanea della simmetria chirale.

Essa può essere capita in modo semplice nel modello  $\sigma$ , osservando che la corrente assiale deve essere conservata. Ma nella fase spontaneamente rotta

$$\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi = +2mi \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (29)$$

(in bulk)  $i \not{\partial} \psi = m \psi \Rightarrow \not{\partial} \psi = -im \psi \Rightarrow \not{\partial} \gamma_5 \psi = im \psi$

dunque necessariamente

$$0 = \partial_\mu j_5^\mu = \partial_\mu \left( \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \pi^\alpha \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \pi \right) \quad (30)$$

da cui segue  ~~$2mi \bar{\psi} \gamma_5 \psi = -\partial_\mu (\pi^\alpha \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \pi)$~~

~~$$= -\pi^\alpha \Box \sigma$$~~
~~$$= -\pi^\alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}$$~~
~~$$g v i \bar{\psi} \gamma_5 \psi = \pi^\alpha \partial_\mu \pi$$~~

(31)

Questo ci dice che  $\pi = -i \bar{\psi} \gamma_5 \psi$  e

richiede una cancellazione, che va verificata usando le leggi classiche del moto e implica in particolare l'esistenza di bosoni di Goldstone. A livello quantistico la relazione fra il contributo leonico e quello del piro può essere formalizzata usando la più generale espressione per l'operatore di indice della corrente assiale:

$$\langle p | j_5^\mu | n \rangle = \frac{1}{2} \psi_p(k') \left( \gamma_\mu \gamma_5 g_A(q^2) + \gamma^\mu \gamma_5 g_P(q^2) \right) \psi_n(k) \quad (31')$$

dove si sta considerando l'elemento di indice della corrente  $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \delta_S \psi$  e  $q = k' - k$

Ne segue che

$$\langle p | j_{\mu}^{\nu} | n \rangle = \frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma^{\nu} \delta_S \psi (2m g_{\mu}^{\nu}(q^2) + q^2 g_{\mu}^{\nu}(q^2)) \quad (31)$$

Il contributo pseudoscalare è quello che porta attraverso uno stato di pioni:

$$q^{\mu} g_{\mu}^{\nu}(q^2) = \langle 0 | j^{\mu} | \pi \rangle \frac{+i}{q^2} \langle p | \pi | n \rangle$$

$\begin{matrix} k & q & k' \\ \nearrow & \vdots & \searrow \\ n & p & \end{matrix}$

$$= -i q_{\nu} f_{\pi} \frac{+i}{q^2} g_{\pi n n} \quad (32)$$

Abbiamo dunque

$$2m g_{\mu}^{\nu}(0) = f_{\pi} g_{\pi n n} \quad (33)$$

Nel modello siqve si ha

$$g_{\pi n n} = g$$

$$m = g v$$

$$v = f_{\pi}$$

e dunque  $g_A = 1/2$  consistente con il fatto che la corrente assiale ha un tenore fisico della

$$j_{5a}^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \delta_S \frac{\tau_a}{2} \psi \quad (34)$$

↑ 1/2 da generatori di  $SO(2)$

### 3 Il potenziale efficace e l'azione efficace

La rottura spontanea di simmetria è caratterizzata da un livello quantistico del vuoto che opera (a cominciare dal campo) ha un valore medio non-nullo nello stato fondamentale della teoria. Occorre quindi un formalismo per poter calcolare questi VEV, includendo le fluttuazioni quantistiche.

Noi sappiamo che, dato il lagrangiano generico

$$Z[J] = \int D\phi e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \quad (35)$$

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J} \Big|_{J=0} = \frac{\delta \ln Z}{\delta J} \Big|_{J=0} \quad (37)$$

Vorremo ora determinare una quantità che fornisca il valore medio dell'energia in uno stato tale che  $\phi$  abbia un valore pari al suo VEV. Questo si può fare usando una procedura simile a quella della termodinamica.

Ci chiediamo inanzitutto qual è il valore della sorgente che corrisponde ad un dato  $\langle \phi \rangle$ : chiamiamo

$$\phi_c \equiv \langle \phi \rangle = \frac{\delta \ln Z[J]}{\delta J} = \frac{\delta W[J]}{\delta J} \quad (38)$$

Costruiamo  $T[\phi_c] \equiv W[J] - \int d^4x J \phi_c \quad (39)$

dove supponiamo che  $\phi_c$  sia espresso in funz. di  $J$ , usando



Sia il funzionale  $W[\phi_j]$  de l'azione efficace  $\Gamma[\phi_j]$  hanno un'interpretazione semplice ed interessante in termini di diagrammi di Feynman.

Consideriamo dapprima  $W[\phi_j]$ . Sappiamo che  $\Gamma[\phi_j]$  genera per differenziazione le b. di Green:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z} \frac{\delta^n W[\phi_j]}{\delta \phi_j(x_1) \dots \delta \phi_j(x_n)} \quad (43)$$

Ora consideriamo specificamente la funzione a due punti:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_j]}{\delta \phi_j(x_1) \delta \phi_j(x_2)} \quad (44)$$

Calcolino

$$\frac{\delta^2 W[\phi_j]}{\delta \phi_j(x_1) \delta \phi_j(x_2)} = \frac{\delta}{\delta \phi_j(x_1)} \frac{1}{Z[\phi_j]} \frac{\delta Z}{\delta \phi_j(x_2)} =$$

$$= \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta \phi_j(x_1) \delta \phi_j(x_2)} - \frac{1}{Z[\phi_j]} \frac{\delta Z}{\delta \phi_j(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta \phi_j(x_2)} =$$

$$= G^{(2)}(x_1, x_2) - G(x_1) G(x_2) =$$

$$= \langle T \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle - \langle \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_2) \rangle \quad (45)$$

Ossia, diagrammaticamente

$$\frac{\delta^2 W}{\delta \phi_j \delta \phi_j} = \text{diagrammi}$$

The diagrammatic equation shows the second-order derivative of the generating functional. On the left is the full two-point function. On the right, the first term is a diagram with a loop (self-energy) on a propagator line. The second term is a diagram consisting of two separate propagator lines, representing the product of two one-point functions.

Ovviamente qualunque contributo discusso contribuisce ad entrambi i termini: solo i contributi connessi contribuiscono a  $\frac{\delta^2 W}{\delta \varphi^2}$ .

Questo continua ad ordini superiori:  $\frac{\delta^n W}{\delta j_1 \dots \delta j_n}$  contiene

$\frac{1}{2} \frac{\delta^m Z}{\delta j_1 \dots \delta j_m}$  da cui si sottraggono termini ottenuti differenziando

$\frac{\delta}{\delta j_i} = \frac{1}{2}$  ma a più volte in tutti i modi possibili.

Ne segue che

$$\frac{\delta^n W}{\delta j_1 \dots \delta j_n} = \langle \bar{1} \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle_{\text{conn.}} \quad (46)$$

Osserviamo in particolare che la linea di due punti connessa è il propagatore, e studiamo ora  $\langle \bar{1} \varphi \rangle$ . Quindi  $\frac{\delta^2 W}{\delta j \delta j}$  è il propagatore in presenza di sorgenti.

Notiamo che la eq. (40) implica

$$\frac{\delta \delta \Gamma}{\delta j(x) \delta \varphi(x)} = - \delta(x-y) \quad (47)$$

Per il membro sinistra possiamo usare risultato come

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= - \int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi_a(x) \delta \varphi_a(z)} \frac{\delta \varphi_a(z)}{\delta j(z)} \quad (2) \\ &= - \int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi_a(x) \delta \varphi_a(z)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(z) \delta j(z)} \quad (48) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la Eq. (38).

Possiamo vedere l'ultima riga come l'espressione del fatto che

le matrici funzionali  $\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi \delta \varphi}$  e  $\frac{\delta^2 W}{\delta i \delta j}$  sono (a meno del segno) l'una l'inversa dell'altra. Ricordando che  $\frac{\delta^2 W}{\delta i \delta j}$  è il propagatore abbiamo che

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi \delta \varphi} = -S^{-1}(x-y) \quad (49)$$

Continuiamo ad andare superiori: notando che possiamo sempre scrivere

$$\frac{\delta}{\delta i(x)} = \int d^4 z \frac{\delta}{\delta \varphi(z)} \frac{\delta \varphi(z)}{\delta i(x)} \quad (50)$$

ove nell'ultimo passaggio usiamo una notazione "funzionale" compatta. Abbiamo che

$$\frac{\delta^3 W}{\delta j_i \delta j_j \delta j_k} = - \frac{\delta}{\delta j_i} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi \delta \varphi} \right)^{-1} = - \frac{\delta}{\delta j_i} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi \delta \varphi} \right)^{-1} S(S^{-1})$$

Ora però notiamo che se  $\pi \pi^{-1} = 1$  allora  $\frac{d}{dx} \pi^{-1} = - \left( \frac{d}{dx} \pi \right) \pi^{-1}$

quindi (ripetendo le "same" per maggior chiarezza)

$$\frac{\delta^3 W}{\delta j_i \delta j_j \delta j_k} = - \int d^4 x \int d^4 u \int d^4 v \delta(z-u) \delta(u-x) \delta(v-y) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(u) \delta \varphi(v)}$$

L'ultima identità può essere rappresentata diagrammaticamente come

$$\text{Circle with 2 lines} = \text{Tree diagram with 3 lines and shaded nodes} \quad (53)$$

In altri termini  $\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi \delta \phi \delta \phi}$  è quello che resta della  $\Gamma$ .

a tre punti se si amputano le linee esterne, ossia  $\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi \delta \phi \delta \phi}$  è il generatore delle e il contributo OPI alla base a tre punti. Iterando l'argomento si dimostra che l'generatore delle  $\Gamma$  ad  $n$ -punti OPI.

Ad es si ha

$$\frac{\delta^4 \Gamma}{\delta \phi \delta \phi \delta \phi \delta \phi} = \text{Tree diagram} + \text{Chain of nodes} + \dots$$

~~Mostriamo ora come il potenziale efficace possa essere calcolato in uno sviluppo in loop.~~

~~Per prima cosa, ricordiamo che il numero di loop di un diagramma qualunque è pari a~~

$$L = P - V + 1$$

(54)

~~Notiamo ora che in un diagrammi Feynman, ripistinando  $t_i$~~

Vediamo dunque che l'azione efficace ha la forma

$$\Gamma[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \varphi(-k) (k^2 + m^2 - \text{self-energy}(k)) \varphi(k) \\ + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} V_n(k_1, \dots, k_n) \varphi(k_1) \dots \varphi(k_n) \quad (54)$$

dove  $V_n(k_1, \dots, k_n)$  è la somma di diagrammi 1PI, ossia il vertice efficace.

Ne segue che se si calcola il path integral con sorgente

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{i[\Gamma[\varphi] + \int d^4 x J\varphi]}$$

esso fornisce il risultato corretto per il PI completo posto che si includano solo i contributi ad albero.

Per il PI completo si può ottenere

Il numero di loop in un diagramma si può determinare notando che

$$L = P - V + 1 \quad (56)$$

ma ripristinando  $\hbar$  nel PI

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \Gamma + \int d^4 x J\varphi \right]} \quad (57)$$

si vede che un vertice porta  $\hbar^{-1}$  mentre un propagatore  $(\hbar \frac{\delta}{\delta j})^2 \frac{1}{k} \sim \hbar^{-1}$ . Dunque in un diagramma la potenza di  $\hbar$  di un diagramma è  $\hbar^{P-L} = \hbar^{L+1}$ .

Questo si dice in particolare che il limite  $\hbar \rightarrow 0$  per cui si arriva alla somma dei diagrammi ad albero.

Ma dunque il PI  $Z = \exp iW$  può essere ottenuto semplicemente valutando il PI Eq. (55) nel limite di punto a sella, ossia come

$$Z[\mathcal{J}] = e^{i P[\varphi_s] + i \int d^4x j \varphi_s} \quad (58)$$

ovvero

$$\left. \frac{dP}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_s} = -j \quad (59)$$

Ossia 
$$W[\mathcal{J}] = P[\varphi] + \int d^4x j \varphi \quad (60)$$

che è proprio la def. dell'azione efficace.

Possiamo inoltre capire come descrivere la rottura spontanea di simmetria nel linguaggio dell'azione efficace.

Abbiamo visto che

$$\frac{\delta^2 P}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} = S_{\varphi\varphi}^{-1} = [k^2 - m^2 + M^2(k^2)] \quad (61)$$

La massa fisica è la sol. dell'eq.

$$k^2 - m^2 + M^2(k^2) = 0 \quad (62)$$

Rottura spontanea di simmetria significa che le soluzioni dell'eq.  $\left. \frac{\delta \Pi}{\delta \phi_i} \right|_{\bar{\phi}_i} = 0$  (che sono proprio quelli al VEV del campo) non sono invarianti. Ma dunque un argomento identico a quello classico mostra che

$$M_{ij} = \frac{\delta^2 \Pi}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \quad (63)$$

ha un autovalore nullo. Ma questo autovalore corrisponde ad una configurazione di campo costante, ossia con  $k^2 = 0$ . Concludiamo che  $S^{-1}_{ij}$  ha un autovalore nullo a  $k^2 = 0$ , dunque vi è un'oscillazione senza masse nella teoria.

# IV Invarianza di gauge

## 1. Interpretazione geometrica

Abbiamo visto a suo tempo che la Lagrangiana per un campo di spin uno, massa zero, è invariante se il campo viene assoggettato alla trasformazione

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \quad (1)$$

Questa trasformazione dà luogo ad un'interessante invarianza se il campo viene accoppiato ad un campo di materia: ad esempio per un campo di Dirac la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi \quad (2)$$

con  $D_\mu = (\partial_\mu - ie A_\mu)$  è invariante sotto trasformazioni di fase locali:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\theta(x)} \psi \quad (3)$$

può anche il campo ("di gauge")  $A_\mu$  si trasforma secondo la eq. (1). O

Questa invarianza può essere interpretata geometricamente nel modo seguente: se la trasformazione di simmetria eq. (4) diventa locale, questo vuol dire che dopo la trasformazione il campo in due punti diversi non può essere confrontato direttamente, perché si è trasformato in modo diverso. Quindi la derivata ordinaria

$$\partial_\mu \psi(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \epsilon \mu) - \psi(x)}{\epsilon} \quad (5)$$

non ha significato geometrico. Possiamo però definire una derivata covariante, introducendo un operatore che riporta la trasformazione del campo dal punto  $x$  al punto  $y$ :

$$\bar{U}(y, x) \equiv e^{i\theta(y, x)} \quad (6)$$

tale che sotto la transf. eq. (4)

$$\bar{U}(y, x) \rightarrow e^{ie\theta(y)} \bar{U}(y, x) e^{-ie\theta(x)} \quad (7)$$

Naturalmente  $\bar{U}(x, x) = 1$  (8)

e  $\bar{U}(y, x)\psi(x) \rightarrow e^{ie\theta(y)} \bar{U}(y, x)\psi(x)$ . (9)

Quindi  $\bar{U}(y, x)\psi(x)$  e  $\psi(y)$  possono essere confrontati direttamente perché si trasformano nello stesso modo.

Possiamo quindi definire una derivata covariante:

$$n^\mu D_\mu \psi \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x^\mu + \epsilon n^\mu) - \bar{U}(x + \epsilon n, x)\psi(x)}{\epsilon} \quad (10)$$

Nell'ipotesi di continuità, possiamo sviluppare

$$\bar{U}(x + \epsilon n, x) = 1 + i\epsilon n^\mu A_\mu + \dots$$

$$A_\mu \equiv \frac{1}{ie} \frac{\partial \bar{U}(y, x)}{\partial y^\mu} \Big|_{y=x} \quad (11)$$

da cui  $D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$  in accordo con la eq. (e)

Ne segue immediatamente che sotto una trasformazione

della forma Eq. (7),  $A_\mu \rightarrow \frac{1}{ie} \frac{\partial}{\partial y^\mu} U(y) \bar{U}(y,x) U(x)$   
 da cui:  

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \quad (12)$$

L'invarianza di gauge della Lagrangiana è quindi  
 conseguenza del fatto che manifestamente  $D_\mu \psi$  Eq. (10)  
 si trasforma come  $\psi(x)$ :

$$D_\mu \psi \rightarrow e^{ie\theta(x)} D_\mu \psi \quad (13)$$

come segue dal fatto che entrambi i termini a membro destro  
 nella Eq. (10) hanno questa proprietà di trasformazione.

Notiamo l'analogia con la gravitazione: infatti  $A_\mu$  svolge il ruolo  
 di connessione che realizza il trasporto parallelo del campo  
 $\psi$ , ma nello spazio  $U(1)$  in cui vivono i campi (più precisamente  
 sul fibrato  $M_4 \times U(1)$ , con  $M_4$  lo spazio di Minkowski  $3+1$  dim.)  
 possiamo inoltre usare lo stesso argomento geometrico per costruire  
 una Lagrangiana invariante per il campo  $A_\mu$ .

Osserviamo che essa deve contenere un termine della forma  $\partial_\mu A_\nu$   
 (cinetico), ma invariante di gauge. Esso può essere costruito in  
 due modi equivalenti, ispirato dalla relatività generale:  
 come termine del secondo ordine nello sviluppo di  $U$  eq. (11),  
 o come "curvatura" - commutatore di due derivate covarianti.

Abbiamo infatti che il commutatore si trasforma come

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow e^{ie\theta(x)} [D_\mu, D_\nu] \psi(x) \quad (14)$$

(infatti la deriv. covariante si trasforma come il campo, quindi

avvicinate anche la derivata della derivata).

Ma

$$[D_\mu, D_\nu] = [(\partial_\mu - ie A_\mu), (\partial_\nu - ie A_\nu)] \\ = -ie (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (15)$$

Se definiamo

$$F_{\mu\nu} \equiv (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (16)$$

abbiamo che  $F_{\mu\nu}$  è necessariamente invariante, in quanto

$$ie F_{\mu\nu} \psi \rightarrow ie F_{\mu\nu} e^{ie\theta} \psi \quad (17)$$

in conseguenza della Eq. (14).



Imprendo costante d'accoppiamento ridimensionali  $D_\nu$   
 la più generale lagrangiana e quindi la legg. di Maxwell,  
 eventualmente (se si ammette la possibilità di violazione di CP)  
 merata la

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (18)$$

## 2 Teorie di gauge non-abeliane

La costruzione geometrica dell'invarianza di gauge in QED si presta ad essere generalizzata al caso non-abeliano.

A questo fine, consideriamo campi di materia che portano la rapp. di un gruppo intero con generatori  $\lambda_a$

$$[\lambda_a, \lambda_b] = i f^{abc} \lambda_c \quad (19)$$

sotto ai si trasformano come

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{i\theta^a \lambda_a} \psi \quad (20)$$

Possiamo costruire un termine cinetico + accoppiamento invariante costruendo la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi \quad (21)$$

La derivata covariante è costruita come prima:

$$\bar{U}(\gamma, x) \rightarrow e^{i\theta^a \lambda_a} \bar{U}(\gamma, x) e^{-i\theta^a \lambda_a} = \quad (22)$$

da cui  $= U(\gamma) \bar{U}(\gamma, x) U^\dagger(x)$ , con  $U(x)$  def. dalla eq. (20).

$$A_\mu \equiv \frac{\partial U}{\partial \theta^a} \Big|_{\theta=0} \quad (23)$$

e perciò  $A_\mu = A_\mu^a(x) \lambda_a \quad (24)$

e quindi  $D_\mu = \left( \partial_\mu - ie A_\mu^a \lambda_a \right) \quad (25)$

Nota che le  $A_\mu$  possono essere viste come comb. lin. dei generatori perché vivono nello spazio tangente alla varietà del gruppo. / 49

La proprietà di trasformazione dei campi  $A_\mu$  sotto trasformazioni di gauge  $e^i$ , usando la definizione eq. (23)

$$A_\mu \rightarrow \frac{1}{ie} \frac{\partial}{\partial y^\mu} U(y) \bar{U}(y,x) U^\dagger(x) \Big|_{y=x}$$

$$= \frac{1}{ie} \left( \frac{\partial}{\partial y^\mu} U(y) \right) \bar{U}(y,x) U^\dagger(x) \Big|_{y=x}$$

$$+ U(y) \frac{1}{ie} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \bar{U}(y,x) U^\dagger(x) \Big|_{y=x} \quad (26)$$

$$= U(x) A_\mu U^\dagger(x) + \frac{i}{e} U \partial_\mu U^\dagger = A_\mu'$$

dove abbiamo notato che  $U(y) \bar{U}(y,x) U^\dagger(x) \Big|_{y=x} = 1$ , e che

$\left( \frac{\partial U}{\partial x^\mu} \right) U^\dagger = - U \frac{\partial}{\partial x^\mu} U^\dagger$ , e nell'ultimo passaggio tutto è funzione di  $x$ . Possiamo verificare esplicitamente che

$$D_\mu \rightarrow D_\mu' = U D_\mu U^\dagger \quad (27)$$

inoltre

$$U (\partial_\mu - ie A_\mu) U^\dagger = \partial_\mu + U \partial_\mu U^\dagger - ie U A_\mu U^\dagger \quad (28)$$

dove  $A_\mu$  è dato dalla legge di trasformazione eq. (26).

Per trasformazioni arbitrarie la trasformazione Eq. (26)

diventa

$$A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu \theta + ie [\theta, A_\mu]$$

$$= A_\mu + \partial_\mu \theta - ie [A_\mu, \theta] \quad (28)$$

ossia, in componenti, usando la Eq. (19),

$$A_\mu^a = A_\mu^a + \partial_\mu \theta^a + e f^{abc} \theta^b A_\mu^c \quad (29)$$

Anche il tensore intensità di campo può essere costruito generalizzando la procedura seguita nel caso abeliano.

Notiamo che ora

$$[D_\mu, D_\nu] \psi \rightarrow U [D_\mu, D_\nu] U^{-1} \psi = \frac{1}{-ie} U F_{\mu\nu} U^{-1} \psi \quad (30)$$

quindi la covarianza non è più invariante, ma covariante (come in GR) e la lagrangiana invariante ha la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (31)$$

avendo normalizzato i generatori come

$$\text{tr} \lambda^a \lambda^b = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (32)$$

la forma esplicita in componenti del tensore intensità di campo si ricava dalla definizione Eq. (30):

$$F_{\mu\nu}^a \lambda_a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (31)$$

ossia

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (32)$$

Possiamo definire anche una derivata covariante nella rappresentazione aggiunta: data una quantità

$$\Pi = \Pi^a \lambda_a$$

la derivata covariante è definita dicendo che se  $\Pi$  si trasforma nella rapp. aggiunta

$$\Pi(x) \Rightarrow U \Pi U^\dagger = \Pi' \quad (33)$$

allora

$$D_\mu \Pi \rightarrow (U D_\mu \Pi U^\dagger) \quad (34)$$

Anche in questo caso possiamo usare  $\bar{U}$  eq. (6):

$$U^\dagger D_\mu \Pi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi(x + \epsilon n^\mu) - \bar{U}(x + \epsilon n^\mu) \Pi \bar{U}^\dagger(x + \epsilon, x)}{\epsilon} \quad (35)$$

visto che ora è  $\bar{U} \Pi \bar{U}^\dagger$  a trasformarsi in modo covariante. Vediamo immediatamente che, definito  $A_\mu$  al solito modo, lo sviluppo in serie di Taylor di  $\bar{U} \Pi \bar{U}^\dagger$  è dato da

$$\begin{aligned} \bar{U}(x + \epsilon n^\mu, x) \Pi \bar{U}^\dagger(x + \epsilon, x) &= \\ &= \Pi + i \epsilon e n^\mu [A_\mu, \Pi] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (36)$$

e quindi

$$D_\mu \Pi = \partial_\mu \Pi - i e [A_\mu, \Pi] \quad (37)$$

ossia in componenti

$$x(D_\mu \Pi)^c = \partial_\mu \Pi^c + e f^{abc} A_\mu^b \Pi^c \quad (38)$$



quindi richiedendo  $\lambda_a \rightarrow U^\dagger \lambda_a U$  si ha

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu} D_\rho F^{\mu\nu} \lambda_a &\rightarrow \epsilon_{\mu\nu} D_\rho F^{\mu\nu} U^\dagger \lambda_a U = \\ &= \epsilon_{\mu\nu} U D_\rho F^{\mu\nu} U^\dagger \lambda_a \end{aligned}$$

ovvero

$$D_\rho F^{\mu\nu} \rightarrow U D_\rho F^{\mu\nu} U^\dagger \quad (45)$$

che è appunto la proprietà di trasformazione della derivata covariante.

Notiamo infine che la derivata Eq. (37), assieme all'identità di Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (46)$$

implica l'identità di Bianchi

$$D_\rho F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\mu F_{\nu\rho} = 0 \quad (47)$$

Si vede immediatamente che il membro di ~~destra~~ <sup>sinistra</sup> è completamente antisimmetrico, e quindi l'eq. (47) può essere equivalentemente scritta come

$$D_\rho F_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (48)$$

ovvero, definendo il duale

$$F^{*\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (49)$$

(a volte anche indicato come  $\tilde{F}^{\mu\nu}$ )

$$D_\rho F^{*\mu\nu} = 0 \quad (50)$$

Osserviamo che ne segue che se

$$F^{\mu\nu} = \pm {}^*F^{\mu\nu} \quad (51)$$

allora soddisfa l'eq. classica del moto. Soluzioni di questo tipo sono dette istantanei. Notiamo anche che nel caso abeliano la Eq. (48) è banale (segue dal fatto che  $\partial_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$  identicamente) e ciò fornisce una semplice dimostrazione della (47) (i termini non-abeliani fanno zero per la Eq. (46)).

Consideriamo ora le correnti conservate in seguito alla ~~simmetria~~ invarianza di gauge.

Ricordando che sotto transf. di gauge il campo A si trasforma secondo la eq. (38'), mentre i campi di materia hanno la legge di conservazione associata alla simmetria globale si ha immediatamente che le correnti di Noether  $\tilde{J}^\mu$  sono

~~$$\tilde{J}_{gauge}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A^\alpha} \delta A^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \delta \psi \quad (52)$$~~

dove  $\psi$  indica collettivamente i campi di materia, e quindi

~~$$\tilde{J}_{gauge}^\mu = 2t_a F_{\nu\lambda} D_\nu \theta - \tilde{J}_{materia}^\mu \delta \theta \quad (53)$$~~

Ma ne segue che le cariche conservate sono

~~$$\int d^3x \tilde{J}_{gauge}^0 = \int d^3x 2t_a F_{0i} D_i \theta - \tilde{J}^0 \theta \quad (54)$$~~

$$J_0^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} (\delta^\alpha \psi)_\alpha + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} \delta^\alpha \psi \quad (52)$$

con  $(\delta^\alpha \psi)_\alpha = (D_\mu \theta)^\alpha = 2e (D_\mu \theta)^\alpha$  (53)

$$\left. \begin{aligned} \delta \psi &= i e \theta \psi \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} &= - F_{\mu\nu}^a \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} - i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\ j^\mu &= -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (54)$$

da cui

~~$$J_0^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} (2e (D_\nu \theta)^\alpha + \delta^\alpha \psi) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta^\alpha \psi$$~~

$$J_0^\mu = - [2e (F_{\mu\nu} D_\nu \theta) + \bar{\psi} \gamma^\mu \psi]$$

$$= - [2e F_{\mu\nu} D_\nu \theta - \hat{J}_a^\mu \theta_a] \quad (55)$$

dove  $\hat{J}_a^\mu$  è la corrente di Noether associata

alla simmetria globale. de campo nelle eq. del moto e de non è la corrente di Noether associata alla simmetria globale. La siamo per esempio la dimostrazione che la corrente  $J_0^\mu$  è conservata, e dimostriamo che tuttavia le correnti associate, usando le eq. del moto, sono identicamente nulle.

$$\text{Abbiamo che } Q_a^\mu(x) = \frac{\delta}{\delta \theta(x)} \int d^3x J_0^\mu \quad (56)$$

e dunque

$$Q^0(x) = \frac{\delta}{\delta \theta^a(x)} \int d^3x - F_a^{i0} (D_i \theta) - \hat{J}_a^0 \theta_a \quad (57)$$

Ora osserviamo che

$$\partial_\mu \text{tr} A(x) B(x) = \text{tr} D_\mu A B + \text{tr} D_\mu A D_\mu B \quad (58)$$

Dimostrare:

$$\begin{aligned} \text{tr} D_\mu A B + A D_\mu B &= \text{tr} \left[ \partial_\mu A B + A \partial_\mu B \right] + \\ &+ -ig \left( \text{tr} [A_\mu, A] B + \text{tr} A [A_\mu, B] \right) \\ &= \partial_\mu \text{tr} A B - ig \left( \text{tr} \underbrace{A_\mu A B - A A_\mu B + A A_\mu B}_{\text{ciclica}} \right) \quad (59) \end{aligned}$$

Per tutto

$$Q^0(x) = \frac{\delta}{\delta \theta^a(x)} \int d^3x 2 \text{tr} F_{i0} D_i \theta - \hat{J}_a^0 \theta_a$$

$$= \frac{\delta}{\delta \theta^a(x)} \left( \int d^3x - 2 \text{tr} F_{i0} D_i \theta - \hat{J}_a^0 \theta_a \right)$$

$$= - \frac{\delta}{\delta \theta^a(x)} \int d^3x \left[ (D_i F^{i0})_a - \hat{J}_a^0 \right] \theta_a \quad (60)$$

$$= 0 \quad \text{per le eq. del moto.}$$

Questo riflette il fatto che l'in. di gauge non è una simmetria, ma una ridondanza. Infatti l'eq. del

moto  $D_i F^{i0} = \hat{J}^0$  (61)  
non contiene derivate spaziali rispetto al tempo ed è perciò un vincolo e non un'equazione dinamica. (56)

### 3. Quantizzazione di sistemi vincolati alla Faddeev

Poiché il corpo di gauge ha un numero di gradi di libertà dinamici inferiore al numero di componenti, il problema della sua quantizzazione è un caso di quantizzazione di sistema vincolato. Per capire come procedere, consideriamo dapprima un semplice esempio in Mh.

Consideriamo in particolare l'esempio di una Hamiltoniana bidimensionale

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(q_1 - q_2) \quad (59)$$

Il potenziale non dipende dalla coordinata baricentrica, e quindi l'impulso totale si conserva:

$$[P, H] = 0 \quad (60)$$

$$P = p_1 + p_2 \quad (61)$$

Separando al solito il problema in moto baricentrico e moto relativo abbiamo

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(q) \quad (62)$$

con

$$\begin{cases} q = q_1 - q_2 \\ p = \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (63)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \\ P &= p_1 + p_2 \end{aligned} \right. \quad (64)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M &= m_1 + m_2 \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{aligned} \right. \quad (65)$$

e autofunzioni:

$$\psi_{k,n}(Q, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i k Q} \psi_n(q) \quad (66)$$

Supponiamo ora di imporre il vincolo che l'impulso totale sia nullo. Questo e' appunto un vincolo perche' il moto baricentrico e' libero, quindi se il baricentro e' fermo a  $t_0 = 0$ , lo e' a tutti i tempi.

Quotidianamente non possiamo pero' imporre

$$P \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow p_1 \stackrel{?}{=} -p_2 \quad (67)$$

a livello operatoriale, perche' questo contraddice le rel. di commutazione: e.g.  $[p_1, q_2] = 0$  ma  $[p_2, q_2] = -i\hbar$ , che contraddice l'identificazione di  $p_1$  con  $-p_2$ .  
Possiamo pero' imporre il vincolo come condizione sugli stati fisici:

$$P |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0 \quad (68)$$

Questo naturalmente vuol dire che

$$\Psi = \Psi(q) \quad (69)$$

è indipendente da  $q$ . In altre parole abbiamo risolto il vincolo semplicemente imponendo che la  $p$ -d'onda non dipenda dalla variabile ad esso coniugata. Notiamo che questo va interpretato come una restrizione sullo spazio di Hilbert: la cond. di normalizzazione è

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int dq \Psi^*(q) \Psi(q); \quad (70)$$

in altri termini non solo i valori di stato non dipendono da  $q$ , ma su  $q$  non si integra.

In un formalismo funzionale possiamo imporre il vincolo introducendo una delta funzionale nella derivata:

$$\begin{aligned} \langle x' t' | x t \rangle &= \int Dq(\alpha) e^{i \int dt \mathcal{L}} \\ &= \int Dq Dp e^{i \int dt p \dot{q} - H} \end{aligned} \quad (71)$$

dove intendendo che  $Dq = Dq_1 Dq_2$  e  $Dp = Dp_1 Dp_2$  via e sostituita da

$$\langle x' t' | x t \rangle = \int Dq Dp \delta[p] \delta[q - q_0] \exp i \int dt p \dot{q} - H \quad (72)$$

Infatti:

- la  $\delta[p]$  impone il vincolo  $p=0$
- la  $\delta[q - q_0]$  dice che non abbiamo normalizzare rispetto a  $q$ , ossia  $q$  è fissato ad un certo valore costante  $q_0$  qualunque (notare che l'argomento della  $\delta$  è  $q(t) - q_0$ )
- la  $\delta$  funzionale, una intesa come ma l'indicata dalla parentesi: quadra

prodotta infinita  $\delta(q(t)) \delta(q(t+\epsilon)) \dots \delta(q(t'-\epsilon)) \delta(q(t))$

Possiamo risolvere la Eq. (72) in una forma più generale sfruttando la nota identità distribuzionale

$$\delta(f(a)) = \delta(a - a_0) \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{a=a_0} \quad (73)$$

A livello funzionale abbiamo

$$\delta[Q(\tau)] = \delta(f(Q(\tau_1)) f'(Q(\tau_1)) \delta(f(Q(\tau_1)) f'(Q(\tau_1)) \dots \delta(f(Q(\tau_n)) f'(Q(\tau_n))) \quad (74)$$

(avendo supposto per semplicità  $Q_0=0$  e la derivata positiva nell'origine).

Possiamo pensare ai vari  $f'(Q(\tau_1)), f'(Q(\tau_2)), \dots$  come agli autovalori della matrice funzionale diagonale

$$M(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') f'(Q(\tau)) \quad (75)$$

che possiamo riscrivere come

$$M(\tau, \tau') = \frac{\delta f(Q(\tau))}{\delta Q(\tau')} \quad (75')$$

(Analogia:

$$\frac{\partial}{\partial f_i} \sum_j f_i g_j = g_j \Leftrightarrow \int dx f(x) g(x) = g(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial f_i} \sum_j F(f_j) = \frac{\partial F[f_i]}{\partial f_i} \Leftrightarrow \int dx F[f(x)] \left( \frac{\partial F}{\partial f(x)} \right)$$

Abbiamo così

$$\delta[Q(\tau)] = \delta[f(Q(\tau))] \text{Det} \frac{\delta f(Q(\tau))}{\delta Q(\tau)} \quad (75'')$$

che possiamo ulteriormente riscrivere come  $\delta Q(\tau)$  / 60

$$\begin{aligned} \delta(q(\tau)) &= \det \{P, f(q_0)\} \delta[f(q_0)] \\ &= \det \{ [P, f(q_0)] \} \delta[f(q_0)] \quad (76) \\ &= \delta(f(q_0)) \det \{G, f(q_0)\} \end{aligned}$$

dove  $\{ \}$  indica la parentesi di Poisson (il passaggio fra parentesi  
 ne ricorda la relazione con gli op. quadratici: ma nel PI  
 compaiono quantità classiche) e nell'ultimo passaggio  
 abbiamo indicato con  $G$  il generatore del vincolo, ossia il  
 generatore della trasformazione  $q_0$  (dip. temporale) che il  
 vincolo impedisce. Infatti, questa è l'integrazione che non  
 deve avvenire in quanto la  $b$ . d'onda è indep. dalla variabile  
 canonicamente coniugata al vincolo.

Ora torniamo alla Eq. (72) e scriviamo la  $\delta(P)$  funzionale

$$\text{come} \quad \delta(P) = \int \mathcal{D}A \exp i \int d\tau P(\tau) A(\tau) \quad (77)$$

Abbiamo

$$\langle x'(t') | x(t) \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \mathcal{D}A \delta(q - q_0) \exp i \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^2 p_i (\dot{q}_i + A) - H \quad (78)$$

e quindi eseguendo l'integrale funzionale troviamo

$$= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}A \delta(q - q_0) \exp i \int d\tau L \quad (79)$$

dove

$$L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1 + A)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_2 + A)^2 - V(q_1 - q_2) \quad (80)$$

Quindi arriviamo alla conclusione che la quantizzazione del sistema vincolato si esegue (a) modificando la Lagrangiana in modo da includere il vincolo (b) introducendo  $\lambda$  nel PI ma delta funzionale che fissa l'integrazione lungo la variabile coniugata al vincolo.

E' interessante osservare che a livello classico le eq. del moto de segno della Lagrangiana Eq. (80) sono

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} m_i(\dot{q}_i + \epsilon A) &= - \frac{\partial V}{\partial q_i} & (81) \\ \sum_i m_i(\dot{q}_i + \epsilon A) &= 0 & (82) \end{aligned} \right.$$

ovvero la Eq. (82) e' quella per A (che non ha deriv. rispetto al tempo) del corrispondente naturalmente  $\dot{q}_i$  a momento di Hamiltoniano

$$p_i = m_i(\dot{q}_i + \epsilon A)$$

quindi riconosciamo nella (82) il vincolo A non e' una variabile dinamica, funziona moltiplicatore di Lagrange che impone il vincolo. Questo continua ad essere vero a livello quantistico. Notiamo che la Lagrangiana ha un'invarianza "di gauge"

$$\left\{ \begin{aligned} q_i &\rightarrow q_i + \alpha(t) \\ A &\rightarrow A - \dot{\alpha}(t) \end{aligned} \right. \quad (84)$$

Notiamo che il generatore di questa trasformazione e' proprio il generatore del vincolo. Possiamo utilizzare questa invarianza per assegnare ad A(t) un valore qualunque, compreso A=0.

Riconosciamo quindi questa come una formulazione del problema di partenza in termini di una teoria di gauge 0+1 dimensional, che ora sappiamo trattare

~~completamente~~ il problema studiato prima a livello sia  
 classico che quantistico. La sua conetta quadratica  
 canonica è data dalla formula di Faddeev

$$\langle x' | t' \rangle \langle x | t \rangle = \int Dq Dp \delta [ F(q, p) ] \text{Det} \{ G, F \} \exp i I \quad (85)$$

ovvero il determinante è da considerarsi fatto rispetto agli indici  
 temporali  $t, t'$  ( $f = f(t), G = G(t')$ ), e dove  $I$  contiene  
 la lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  della hamiltoniana canonica il vincolo come mult.  
 di Lagrange.  
 Questo fornisce il formalismo necessario per la quantizzazione delle  
 teorie di gauge.

Notiamo che qui siamo partiti dalla hamiltoniana, abbiamo  
 imposto il vincolo come  $\delta (\delta(P))$ , la abbiamo  
 risolta come mult. di Lagrange, e questo ha fatto  
 sparire la  $\delta$  da una eq. del moto. Nel  
 caso delle teorie di gauge si fa il percorso inverso:  
 si parte da una Lagr. in cui una delle eq. del moto è  
 un vincolo, si "risolve" il vincolo (cioè si individua  
 qual è la variabile canonica da cui la b. d'ordine  
 non si perde) e si scrive l'Hamiltoniana canonica con una  
 $\delta$  di una funzione di questa variabile, ed il det. del  
 generatore del vincolo e della funzione stessa.

#### 4. Quantizzazione delle teorie di gauge

Possiamo ora procedere alla quantizzazione delle teorie di Y.M. secondo il metodo precedente. Notare che il PI fornisce una utile schematizzazione, ma in linea di principio la derivazione canonica va verificata.

Iniziamo con la lagrangiana

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (81)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - j_\mu^a A_\mu^a$$

$$= \frac{1}{2} (E_a^2 - B_a^2) - j_\mu^a A_\mu^a$$

$$E_a^i = F_{a,0i}^i = -F_{a,i0}^i; \bar{E}_a = -\dot{A}_a - \bar{D} A_a^0 - g f_{abc} A_b^0 \bar{A}_c \quad (82)$$

$$B_a^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{a,ij}^k; \bar{B}_a = \bar{D}_a \times \bar{A}_a - \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{A}_b \times \bar{A}_c \quad (83)$$

L'espressione non-covariante in termini di  $\bar{E}$  e  $\bar{B}$  è utile per il formalismo canonico.

Le eq. del moto sono:

$$(\bar{D} \cdot \bar{E})_a = j_a \quad (84)$$

$$D^0 \bar{E}_a = (\bar{D} \times \bar{B})_a + \bar{J}_a \quad (85)$$

La eq. (84) è la legge di Gauss, e si vede che la lagrangiana non dipende da  $\dot{A}_a^0$ , e quindi non viene momentaneamente canonizzato con jato ad  $A_a^0$ . ~~In una formulazione canonica decidiamo quindi di~~  
 stabilizzare di  $A_a^0$ , ~~usando la libertà nella scelta di gauge per porre~~  
 $A_0^a = 0 \quad (86)$

(gauge di Weyl).

Con questa scelta la Lagrangiana ed eq. del moto diventano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\bar{A}}_a^2 - \bar{B}^2); \quad \bar{E}_a = -\dot{\bar{A}}_a \quad (87)$$

$$\dot{\bar{E}}_a = (\bar{D} \times \bar{B})_a + j_a \quad (88)$$

con le eq. (83) (def. di  $\bar{B}$ ) ed (84) (legge di Gauss) invariate.

A questo punto identifichiamo  $\bar{A}_a$  come coordinata canonica,  $\dot{\bar{A}}_a = -\bar{B}_a$  come impulso ad essa canonicamente coniugato e scriviamo l'hamiltoniana come

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\bar{E}_a^2 + \bar{B}_a^2) + j_a^{\mu} A_{\mu}^a \quad (89)$$

Le relazioni di commutazione canoniche sono

$$[E_a^i(\bar{x}), A_b^j(\bar{x}')] = \frac{1}{\epsilon_0} \delta_{ab} \delta^{ij} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}') \quad (90)$$

e determinano la teoria quantistica di campo.

Il commutatore di  $\bar{A}_a$  e  $\bar{E}_a$  con l'hamiltoniana da le eq. di Hamilton, che sono rispettivamente la def. di  $\bar{E}$  eq. (87) e la eq. (88), ora viste come eq. operazionali. La legge di Gauss che è un vincolo, non è enersa.

Ora ricordiamo che a livello classico l'inv. di gauge implica la conservazione delle cariche

$$Q = \int d^3x \bar{E}^a (\bar{D} \theta)_a + \int d^3x j^a \theta_a \quad (91)$$

ed identifichiamo

$$G_a = -(\bar{D} \cdot \bar{E})_a + P_a = -\partial_i E_a^i - g f^{abc} A_i^b E_a^i + P_a \quad (92)$$

con l'operatore quantistico che genera le trasformazioni di gauge sotto commutazione.

Infatti si ha

$$[G_a(\bar{x}), \bar{A}_b(\bar{x}')] = -i f_{ab} \bar{D} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}') + g f_{abc} \bar{A}_c \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}') \quad (93)$$

$$[G_a(\bar{x}), \bar{E}_b(\bar{x}')] = -i g f_{abc} \bar{E}_c(\bar{x}) \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}') \quad (93)$$

Il fatto che

$$[G_a, H] = 0$$

~~è una conseguenza diretta dell'invarianza di gauge dell'hamiltoniana.~~  
 è quindi conseguenza diretta dell'invarianza di gauge dell'hamiltoniana. Questo è sempre vero per una legge di conservazione. Ma il fatto che si tratti di un vincolo ci obbliga a procedere come nell'esempio precedente. Possiamo quindi procedere come nell'esempio della serie precedente ed imporre che

$$G_a(x) |\psi\rangle = 0 \quad (95)$$

dove  $|\psi\rangle$  è qualunque stato fisico.

Possiamo vedere da Eq. (95) che una eq. differenziale funziona in rapp. di Schrödinger, prendendo  $-E^i_a = \partial^i \frac{\delta}{\delta A^i_a}$

$$+i \left( \bar{D} \cdot \frac{\delta}{\delta A} \right)_a \psi[A] = -P_a \psi[A]$$

$$= +i \left[ \bar{D} \cdot \delta_{ab} + g f_{abc} \bar{A}_c \right] \frac{\delta}{\delta A^i_b} \psi[A] \quad (96)$$

analogamente alla condizione eq. (68)  $(P\psi = 0)$  imposta nell'esempio

della serie precedente. Bisogna a questo punto distinguere il caso abeliano dal caso nonabeliano. Per la QED infatti possiamo risolvere il vincolo, ossia determinare la variabile da cui la funzione d'onda non dipende, mentre nel caso nonabeliano siamo costretti a usare la formula di Fadeev.

Vediamo prima il caso abeliano. Considerando inoltre il caso in assenza di sorgenti,  $\rho=0$ , abbiamo

$$\bar{\partial} \cdot \sum_{\bar{A}} \Psi[A] = 0 \quad (97)$$

Questo vuol dire che  $\Psi[A]$  non dipende da  $A_L \equiv \bar{\partial} \cdot \bar{A}$

ossia 
$$\Psi[\bar{A}] = \Psi[\bar{A}_T] \quad (99)$$

$$\bar{\partial} A_T = 0 \quad (100)$$

dove

possiamo costruire  $\bar{A}_T$  definendo il proiettore trasverso

$$(P_T)_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta}; \quad \bar{A}_T^i = P_T^{ij} A_j \quad (101)$$

E' facile verificare che  $(P_T)^2 = P_T$  (e' un proiettore)

$$\partial_i P_T = 0 \quad (102)$$

L'eq. di Schrödinger risultante per i gradi di libertà non vincolati è dunque

$$H_T \Psi[A_T] = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \left[ \delta^2 + (\bar{\partial} \times \bar{A}_T)^2 \right] \Psi[A_T] \right] = E \Psi[A_T]$$

Nel caso  $\rho \neq 0$   $\bar{\partial} \cdot \bar{E} = +\rho$ .

Si ha quindi che  $\Psi$  dipende da  $\bar{\partial} \cdot \bar{A}$  (6)

come un'onda piana

$$= i \int d^3x \bar{\psi} \cdot \bar{A} \frac{1}{\Delta} \psi \quad (103)$$

$$\Psi[A] = \Psi[A_T] \text{ e}$$

in fatti manifestamente  $\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} + i \int d^3x' \bar{A} \cdot \bar{\psi} \frac{1}{\Delta} \psi = i \bar{\psi} \frac{1}{\Delta} \psi(x)$   
 $\frac{\delta}{\delta \bar{A}^\mu(x)} - i \int d^3x' \bar{\psi} \cdot \bar{A} \frac{1}{\Delta} \psi$

$$i \bar{\psi} \frac{\delta}{\delta \bar{A}^\mu} \Psi[A] = -\Psi[A_T] \psi \text{ e} \quad (104)$$

Notiamo che la fase dà un contributo coulombiano all'energia cinetica in quanto

$$\frac{\delta^2}{\delta A^2} e^{-i \int d^3x \bar{\psi} \cdot \bar{A} \frac{1}{\Delta} \psi} = \psi \frac{1}{\Delta} \psi \text{ e} \quad (105)$$

e dunque

$$H \Psi[A] = e^{-i \int d^3x \bar{\psi} \cdot \bar{A} \frac{1}{\Delta} \psi} (H + C) \Psi[A_T] \quad (106)$$

con  $C = \int d^3x \psi \frac{1}{\Delta} \psi \quad (107)$

In un formalismo lagrangiano possiamo ora scrivere il PI introducendo una  $\delta$  per la variabile coniugata al vincolo, mentre notiamo che il vincolo stesso è imposto dall'integrazione  $\int dx^0$  sulla variabile ad esso coniugata, ossia  $\text{div} \bar{A} = 0$ . Verifichiamo che  $\bar{A}_\mu$  sia coniugata al vincolo: questo significa che  $\{ \bar{A}_\mu, A_\nu \} = \delta_{\mu\nu}$  deve essere canonica. Abbiamo

$$[G, \bar{A}_\mu] = \left[ \bar{\psi} \cdot \bar{A}, \bar{\psi} \cdot \bar{A} \right] = -i \delta(x-y) \quad (108)$$

~~$\bar{A}_\mu$~~

Nel caso abeliano possiamo dunque scrivere il PI  
 come

$$\begin{aligned} Z[\bar{A}] &= \int \mathcal{D}A e^{iI} \delta(\bar{A}_L) = \\ &= \int \mathcal{D}A e^{iI} \delta(\bar{0} \cdot A) \end{aligned} \quad (109)$$

~~ove il determinante del laplaciano è una costante  
 che può essere assorbita nella normalizzazione.~~

Notiamo però che se usiamo la formula di Faddeev  
 possiamo scrivere il PI anche nel caso non-abeliano,  
 in cui non sappiamo veramente che cosa è la variabile  
 coniugata al vincolo, cioè

che contribuisce all'energia, ma non alla densità  
 di momento che procede con  $\vec{v}$  della  $DA$ , e  
 rispettivamente

$$Z = \int DA e^{iI} \delta(F[A]) \text{Det} \{G, F\} \quad (109')$$

Utile da questa espressione vale più generalmente nel caso non abeliano  
 Alcune scelte di  $F[A]$  sono

$$F[A] = \bar{D} \cdot \bar{A} \quad \text{gauge di Weyl - Coulomb}$$

$$F[A] = \partial_\mu A_\mu \quad \text{gauge di Lorentz} \quad (109'')$$

$$F[A] = n_\mu A_\mu \quad \begin{cases} n_\mu \text{ timelike} \\ n_\mu \text{ space} \rightarrow \text{Arnouitt-Fischer} \\ n_\mu \text{ light-cone} \end{cases}$$

Prima di studiare le conseguenze, vediamo una forma equivalente  
 della Eq. (107), talora utile per le applicazioni. Facciamo  
 quindi una breve digressione per presentare una derivazione  
 meno rigorosa, che però ha un certo valore mnemonico, e di semplice  
 interpretazione fisica. Torniamo per semplicità al caso abeliano.

Immediato, riscriviamo la (109) modificandola leggermente la  
 costante che lascia l'integrale:

$$Z = \int DA e^{iI} \delta(\bar{D} \cdot \bar{A} - \omega) \quad (109)$$

(cioè scegliendo  $F[A] = \bar{D} \cdot \bar{A} - \omega$ ).

Ora osserviamo che possiamo integrare su  $\omega$  con un  
 peso gaussiano:

$$Z = \int \mathcal{D}\omega \left[ \exp \frac{i}{2\zeta} \int d^4x \omega^2 \right] \int \mathcal{D}A e^{i \int \mathcal{L}(\vec{\partial} \cdot \vec{A} - \omega)} \det \mathcal{L} \quad (110)$$

Calcolando l'integrale si ha

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{i \int \left[ I + \frac{1}{2\zeta} \int d^4x (\vec{\partial} \cdot \vec{A})^2 \right]} \det \mathcal{L} \quad (111)$$

L'argomento può essere ripetuto per qualunque scelta di gauge  $F[A]$ , con il risultato

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{i \int \left[ I + \frac{1}{2\zeta} \int d^4x (F[A])^2 \right]} \det \{G, F\} \quad (112)$$

dove  $G$  è il generatore delle trasformazioni di gauge.

Notiamo che l'argomento da porta alla (112) è del tutto generale, e da quindi ha ~~forma Eq. (107)~~ e la forma Eq. (112), come già la Eq. (107) vista prima, sono vere anche nel caso nonabeliano generale.

Notiamo che la (112) si riduce alla (109) prendendo il limite  $\zeta \rightarrow 0$ , infatti:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{2\zeta} i} \right)^n e^{\frac{i}{2\zeta} x^2} = \delta(x) \quad (113)$$

e quindi in questo limite il fattore di onda piana si riduce alla  $\delta(F)$ .

Vediamo ora ~~adesso~~ <sup>una</sup> ~~derivazione~~ <sup>derivazione</sup> alternativa e schematica della Eq. (107). Consideriamo per semplicità

il caso abeliano:

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x A_{\mu} (\partial_{\mu} g^{\mu\nu} - \partial^{\mu} g^{\nu}) A^{\nu} \quad (114) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_{\mu}(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^{\mu} k^{\nu}) A_{\nu}(-k)
 \end{aligned}$$

avendo definito

$$A_{\mu}(k) = \int d^4x e^{ikx} A_{\mu}(x) \quad (115)$$

Ma si vede così immediatamente che l'operatore ietico

$$D_{\mu\nu} = -k^2 g^{\mu\nu} + k^{\mu} k^{\nu} \quad (116)$$

ha un modo zero, quindi l'integrale funzionale diverge (il reciproco del determinante non esiste,  $D_{\mu\nu}$  non è invertibile).

Esso corrisponde esattamente alla polarizzazione longitudinale. (117)

Consideriamo  $D_{\mu\nu} k_{\nu} = 0$  nel caso non abeliano  
 Per risolvere il problema, consideriamo la trasformata di gauge

$$A_{\mu} U = U A_{\mu} U^{\dagger} + \frac{i}{e} U \partial_{\mu} U^{\dagger} \quad (118)$$

e notiamo che

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}U \delta(F[A^{\mu}]) &= \int \mathcal{D}U \delta(U) \frac{1}{\text{Det} \frac{\delta F}{\delta U}} \quad (119) \\
 &= \frac{1}{\text{Det} \frac{\delta F}{\delta U} |_{U=0}}
 \end{aligned}$$

o equivalentemente, prendendo  $U = \exp i\theta$  ;  $\theta = \theta_a T_a$

$$\int D\theta \delta(F[A^\theta]) = \frac{1}{\text{Det} \frac{\delta F}{\delta \theta} \Big|_{\theta=0}} \quad (120)$$

Inserendo l'identità Eq. (120) nel PI si ha

$$Z = \int D A D \theta e^{iI} \delta(F[A^\theta]) \text{Det} \frac{\delta F}{\delta \theta} \Big|_{\theta=0} \quad (121)$$

Ma ora osserviamo che nella dipende da  $\theta$ , tranne la  $\delta$ .

Ma se possiamo, per ogni  $\theta$ ,  $A' \equiv A^\theta$  e cambiamo variabile di integrazione da  $A$  a  $A'$  allora nella dipende, e quindi

$$Z = \int D A e^{iI} \delta(F[A]) \text{Det} \frac{\delta F}{\delta \theta} \int D \theta \quad (122)$$

e quindi la formula di Faddeev si ritrova di nuovo per il valore infinito  $\int D \theta$  (valore del gruppo per ogni  $x$  e  $t$ ).

$$Z = \int D A D \theta \delta(F[A^0]) \text{Det } \overline{\delta F} \exp i I \quad (113)$$

Ma ora notiamo che tutti i termini hanno l'oggetto della  $\delta$  sono invarianti di gauge. Pertanto se cambiamo  $\delta$  otteniamo

$$A \rightarrow A' = A^\theta$$

$$Z = \int D A \exp i I \text{Det } \overline{\delta F} \delta(F[A']) \quad (114)$$

Ora nulla dipende da  $\theta$ , e possiamo quindi rimuovere l'integrale in  $D\theta$  che dà solo un fattore infinito (volume del gruppo). Abbiamo così riottenuto la forma Eq. (102) del PI, che possiamo ulteriormente scrivere nella forma Eq. (100) con le manipolazioni di prima.

Capiamo ora che lo scopo della  $\delta(F)$  (gauge fixing) è di bloccare l'integrazione sui gradi di libertà non fisici del potenziale. Tornano quindi alla forma lineare Eq. (100) del PI alla FP. Ci rendiamo conto del fatto che quantizzando in modo corretto sono successe due cose

1) l'azione ha acquistato un termine extra

$$I = \int d^4x \quad -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad - \frac{1}{2\xi} (F[A])^2 \quad (115)$$

2) è comparso un termine di determinante funzionale  $\text{det } \delta b, f$  nel PI

Vediamo ora l'effetto di entrambe per cammi scelte della funzione  $F[A]$ . Consideriamo in particolare le gauge di Lorentz e le gauge lineari. Consideriamo inizialmente il caso abeliano

Notiamo innanzitutto che in entrambi i casi il determinante funzionale è lineare: infatti si ha  $\text{PCA}^{0,1}$

gauge di Lorentz:  $\det \frac{\delta F}{\delta \theta} = \det \left( \frac{\delta (n_\mu (A_\mu + \partial_\mu \theta))}{\delta \theta} \right) = \det \partial_\mu \partial_\mu \quad (16)$

gauge lineari:  $\det \frac{\delta F}{\delta \theta} = \det \left( \frac{\delta (n_\mu (A_\mu + \partial_\mu \theta))}{\delta \theta} \right) = \det n_\mu \partial_\mu \quad (17)$

In entrambi i casi il determinante non dipende da  $A_\mu$  e quindi il risultato è un fattore di normalizzazione.

L'unico effetto della scelta di gauge è quindi la modificazione dell'azione. Abbiamo

gauge di Lorentz  $I = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu + \frac{1}{3} A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu$

$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) \left( -k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) k^\mu k^\nu \right) A_\nu(k)$

gauge lineari  $I = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu - \frac{1}{3} A_\mu n^\mu n^\nu A_\nu$

$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) \left( -k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu - \frac{1}{3} n^\mu n^\nu \right) A_\nu(k)$

In ciascun caso, possiamo invertire l'operatore, trovando

Lorentz  $D^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (121)$

lineari  $\text{Check: } \left( -k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) k^\mu k^\nu \right) \left( g^{\mu\rho} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\rho}{k^2} \right) = -k^2 g^{\mu\rho} + k^\mu k^\rho \left( 1 - \frac{1}{3} + (1 - \xi) \frac{(1 - \xi) k^\mu k^\rho}{k^2} \right)$

$S^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - \frac{(\xi k^2 - m^2)}{(k \cdot m)^2} k^\mu k^\nu - \frac{k^\mu m^\nu + k^\nu m^\mu}{k \cdot m} \right) \quad (122)$

Notiamo che prendendo il limite  $\xi \rightarrow 0$  in entrambi i casi  
 l'operazione si riduce al proiettare i gradi di libertà su  $\xi=0$ :

$$\xi=0 \text{ (gauge di Landau)} \quad \mathcal{L}^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (123)$$

↑ proiettare ortho a  $k$

$$\xi=0 \quad \mathcal{L}^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{k \cdot n} + \frac{n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2} \right) \quad (124)$$

↑ proiettare ortho a  $n$

L'invarianza di gauge (indip da  $\xi$ ) è manifesta quando si  
 osserva che tutti i termini proporzionali a  $\xi$  interagiscono almeno in  
 coppie di  $k^\mu$ : questo fa sempre zero quando contratto con qualunque  
 combinazione on-shell di fermioni (ossia  $\not{n} \dots \not{n} k_\mu \dots = 0$ )

se  $\not{n} \dots \not{n} = \langle T(A_{\mu_1} \dots A_{\mu_n}) \rangle$  (gauge di Feynman).  
 Rimulta particolarmente conveniente usare la Eq. (121) con  $\xi=1$ .  
 Consideriamo ora l'estensione al caso non-abeliano. Torniamo

alla Eq. (96), o equivalentemente alla sua forma funzionale  
 Eq. (107). Nel caso non-abeliano non è più vero che  $\bar{D} \cdot \bar{A}$   
 (parte longitudinale di  $\bar{A}$ ) è coniugato a  $\bar{D} \cdot \bar{E}$ , perché è presente  
 un termine non-abeliano ed il vincolo è non lineare. Inoltre  
 il determinante ora dipende da  $A$ . Occorre quindi usare la Eq. (107),  
 che può essere usata in modo da tener conto del determinante.  
 Consideriamo in particolare le gauge covarianti Eq. (108).

In questo caso abbiamo

$$\frac{\delta \dots \partial_\mu A_\mu}{\delta \theta} = \frac{\delta (\partial_\mu D_\mu \theta)}{\delta \theta} = \dots = \delta (\partial_\mu \partial_\mu \theta + g f^{abc} A_b \partial_c \theta) \quad (125)$$

$\approx \partial_\mu \partial_\nu \delta^{ab} + g f^{abc} \partial_\mu \partial_\nu c$   
 Possiamo quindi rappresentarne il segno e scelt. in modo che il termine cinetico per  $c$  sia canonico (126)

$$\det \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \theta^2} = \int Dc D\bar{c} \exp i \int d^4x \bar{c} (\partial^\mu D_\mu) c$$

dove  $c$  sono campi fermionici scalari, che possono essere inclusi nelle regole di Feynman pur essendo manifestamente non fisici (ghosts).

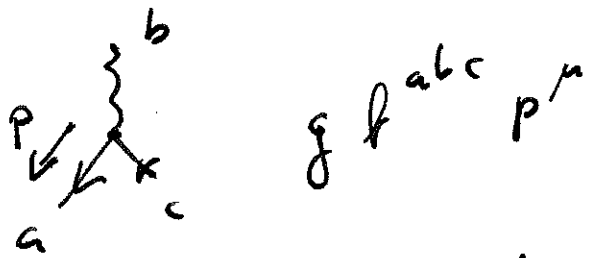
Abbiamo così

$$\mathcal{L}_{ghost} = \bar{c}^a \left( \partial^\mu \delta^{ac} - g f^{abc} \partial^\mu c^b \right) c^c \quad (127)$$

Il termine "cinetico" da un propagatore

$$\langle T c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}$$

entre il termine di interazione da una regola di Feynman



In QED, date le funzioni di Green, ed. di ordine  $S$  possono essere calcolate semplicemente scegliendo funzioni d'onda per gli stati fisici esterni (polarizz. trasverse). Se la somma viene estesa a stati non-fisici, questo non ha alcun effetto, in quanto il proiettale trasverso ha la forma (per stati on-shell)

$$P^{\mu\nu} = - \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu n^\nu + n^\mu k^\nu}{k \cdot n} \right) \quad (128)$$

dove  $(k, n)$  è una base di vettori luce, e la  $n$  contraria di  $k$  da zero per id. di Ward.

Nel caso non-abeliano occorre distinguere che el. di  
 materia  $S$  tra stati fisici contenenti solo bosoni di gauge  
 trasversi (e nessun ghost) e fisici on-shell e-ino di gauge.  
 Questo può essere fatto usando il formalismo BRS. Nota  
 che nel caso non-abeliano l'ist.  $k_{\mu} \Pi^{\mu} \dots \mu_i \dots = 0$   
 vale solo se tutti i campi di gauge esteri sono on-shell  
 tranne al massimo uno, quello (i-esimo) di cui si sostituisce  
 la polarizzazione con l'impulso.

## 5. Il meccanismo di Higgs

La rottura spontanea di simmetria in una teoria con un campo scalare accoppiato ad un campo di gauge dà luogo ad un meccanismo per cui il bosone di Goldstone associato alla simmetria rotta finisce al bosone di gauge: il grado di libertà mancante per diventare neutrino. Vediamo il meccanismo approssimato a livello classico, quindi a livello quantistico, disaccoppiando le id. di Ward associate.

Iniziamo con un campo scalare canonico in presenza di potenziale di rottura spontanea  $V(\phi)$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi) \quad (129)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu \quad (130)$$

$$V(\phi) = -\mu^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2)^2$$

Quivante la teoria è inv. di gauge sotto

$$\phi(x) \rightarrow e^{ie\theta(x)} \phi(x) = \phi'(x) \quad (131)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \theta \quad (132)$$

Il minimo del potenziale dato è quando

$$\phi = \phi_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = v \quad (133)$$

Sviluppando al solito

$$\phi = (\phi - \phi_0) \quad (134)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$$

e prendo

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (135)$$

con  $\phi_1$  e  $\phi_2$  campi reali,  $\mathcal{L}$  potenziale diventa

$$V(\phi) = -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \mu^2 \phi_1^2 + \lambda v \phi_1 \phi_2^2 + \frac{\lambda}{2} (\bar{\phi}^1)^2 \quad (136)$$

Nota che  $\phi_1$  è massivo (è la  $\sigma$ ) mentre  $\phi_2$  è il goldstone (è il  $\pi$ )

Questa è la consueta SSB. Consideriamo però ora il termine cinetico:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^2 &= (D_\mu \bar{\phi}^1)^2 \\ &- \sqrt{2} e v A_\mu \partial^\mu \phi_2 + e^2 v^2 A_\mu A_\mu \sqrt{2} e^2 v A_\mu A_\mu \phi_1 \end{aligned} \quad (137)$$

Si vede quindi che il campo di gauge ha acquistato un termine di massa

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A_\mu \quad (138)$$

$$m_A = \sqrt{2 e^2 v^2} = \sqrt{\frac{2 e^2 \mu^2}{\lambda}} = \sqrt{2} e v$$

Nota che il segno è quello giusto per un termine di massa per le componenti spaziali:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} m^2 A^i A^i \quad (139)$$

A livello quantistico, un termine di massa per il campo di gauge richiede che si spostino le posizioni del polo nel propagatore del campo di gauge.

Abbiamo visto come le correzioni quantistiche traslino la massa per un termine di self-energia che contiene buche contribuisce OPI alla funzione a due punti. Per un campo vettoriale abbiamo

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = \dots \quad (140)$$

(self-energia del fotone)

$$e^{m \cdot q} = m + m^{(2)} + m^{(3)} + \dots \quad (\text{one photon})$$

$$G_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{(-i)g^{\mu\alpha}}{q^2} i \Pi_{\alpha\beta} \frac{(-i)g^{\beta\nu}}{q^2} \quad (141)$$

$$+ \frac{(-i)g^{\mu\alpha}}{q^2} i \Pi_{\alpha\beta} \frac{(-i)g^{\beta\gamma}}{q^2} i \Pi_{\gamma\delta} \frac{(-i)g^{\delta\nu}}{q^2} + \dots \quad (141)$$

Ma ora notiamo che  $\Pi^{\mu\nu}$  : - ha le dimensioni di  $q^2$  (simboli  $\frac{1}{q^2}$  e  $e^{-}$  adimensionale); - è ortogonale a  $q_\mu$  (rel. di Ward) pertanto

$$i \Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \tilde{\Pi}(q^2) \quad (142)$$

e quindi

$$G_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left( q^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu} \tilde{\Pi} \Delta^{\alpha\beta} \Delta^{\sigma\tau} \dots \right)$$

$$\Delta^{\mu\nu} = \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \quad (143)$$

con

che è il proiettore trasverso a  $q^\mu$ :

$$\Delta^{\mu\kappa} \Delta^{\kappa\sigma} = \Delta^{\mu\sigma} \quad (144)$$

$$\text{Quindi } G_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{-i}{q^2 (1 - \tilde{\Pi})} \Delta^{\mu\nu} - \frac{i}{q^2} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (145)$$

e usando la rel. di Ward

$$G_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2 (1 - \tilde{\Pi}(q^2))} \quad (146)$$

Vediamo quindi che il campo di gauge acquista massa se e solo se  $\Pi(q^2)$  ha un polo in  $q^2 = 0$ , ossia se vi è un'eccitazione a massa nulla che contribuisce alla self-energia del fotone. Quest'eccitazione è il bosone di Goldstone (!).

Possiamo calcolare questo contributo esplicitamente: notiamo che la lagrangiana shiftata contiene il termine

$$\mathcal{L}_I = -\sqrt{2} e v A_\mu \partial^\mu \phi \leftarrow \text{nota che } \phi \text{ è il Goldstone} \quad (141)$$

che dà luogo alla regola di Feynman

$$\text{Diagram: } \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} = i\sqrt{2} e v (-i k_\mu) = m_A k^\mu \quad (142)$$

Sia la massa del vertice Eq. (142) contribuiscono alla funzione a due punti come segue:

$$\text{Diagram: } \text{---} \text{---} = \text{Diagram: } \text{---} \text{---} + \text{Diagram: } \text{---} \text{---} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu} &= i m_A^2 g^{\mu\nu} + (m_A k^\mu) \frac{i}{k^2} (-m_A k^\nu) \\ &= i m_A^2 \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il campo } \phi \text{ era} \\ \text{il bosone di Goldstone} \\ \text{quindi ha massa nulla} \end{array} \right. \\ &= i (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \Pi(k^2) \quad (144) \end{aligned}$$

e quindi 
$$\Pi(k^2) = \frac{m_A^2}{k^2} \quad (145)$$

Nota che il campo eq. (142) è univale per l'idea di Ward: se il bosone è il Goldstone di massa zero, genererebbe un polo in  $k^2=0$  ma rivediamo il punto: quindi il bosone di Goldstone non c'è: è stato "inghiottito" dalla polarità. Ward ma dato  $\frac{m_A^2}{k^2}$

longitudinale del campo di gauge (c'è invece il "bosone di Higgs" massivo, corrispondente al campo scalare reale  $\phi_1$ ).

Possiamo vederlo esplicitamente con una scelta di "gauge unitaria": scegliamo la gauge in modo che  $\phi$  sia reale, cioè  $\phi_2 = 0$  identicamente. La lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e^2 \phi^2 A_\mu A^\mu - V(\phi). \quad (146)$$

Manifestamente se  $\phi \neq 0$  il campo  $A_\mu$  acquista una massa; notabilmente in questo caso l'inv. di gauge è rotta esplicitamente.

Il meccanismo attraverso il quale i bosoni di Goldstone diventano poi longitudinali può essere capito a livello di identità di Ward. Come al solito, l'argomento formale ha anche il vantaggio di valere a tutti gli ordini, per teorie efficaci.

L'argomento può essere formalizzato nel modo seguente.

Osserviamo innanzitutto che se una lag. ha sim. globale con commutatore di Noether  $J^M$  abbiamo visto che sotto trasform. locali:

$$\delta \mathcal{L} = g \partial_\mu \theta J^\mu \quad (147)$$

Ne segue immediatamente che aggiungendo alla lagrangiana un termine

$$\mathcal{L}_A = -g A_\mu J^\mu + O(A^2) \quad (148)$$

la lagr. è invariante di gauge locale se  $A_\mu \rightarrow A_\mu + D_\mu \theta$ , I ~~ossia il primo~~ <sup>dal primo membro</sup> ~~del primo~~ <sup>inghi</sup> ~~termini~~  $O(A^2)$  si possono determinare per invarianza di gauge (ad

es sono anelli in QED, fissati pure a  $e^2 A^2 \phi^2$  in QED scalare).

Quanto significa che l'inv. di gauge implica che al primo ordine  $\delta \mathcal{L}$  la lagr. è invariante delle trasform. locali? Ora ricordiamo che per sim. spontaneamente rotte la costante  $f$  (149)

Im altri termini capiamo che la  $J^\mu$  eq. (141) dell'esempio di prima van  $\rightarrow$  in caso, ma è conseguenza dell'inv. di gauge.

de si accoppia al bosone di Goldstone de indicano con " $\pi$ "

e'

$$\langle 0 | j^\mu | \pi \rangle = -i p^\mu f_\pi \quad (149)$$

Nel nostro esempio esplicito  $\langle 0 | \sqrt{2} \phi_1 \partial_\mu \phi_2 | \pi \rangle = \sqrt{2} v (-i p^\mu)$   
 Ma osserviamo quindi che la l. di Green a due punti per  $\pi$  può essere scritta come

$$G_{(\pi)}^{\mu\nu} = \langle T A^\mu A^\nu \rangle = m^2 + m^2 \frac{g}{f_\pi} \dots \quad (150)$$

introdotta  $f_\pi$  contributo

dove nel secondo termine abbiamo

$$\langle T J^\mu J^\nu \rangle = g^2 f_\pi^2 \frac{i}{2} p^\mu p^\nu \quad \text{da} \quad (160)$$

coincidente con

$$: \Pi^{\mu\nu} = i (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \frac{f_\pi^2}{\pi(k^2)} \rightarrow \pi(k^2) = \frac{g^2 f_\pi^2}{k^2}$$

Ma ricordando la costante della self-energia questo ci dice

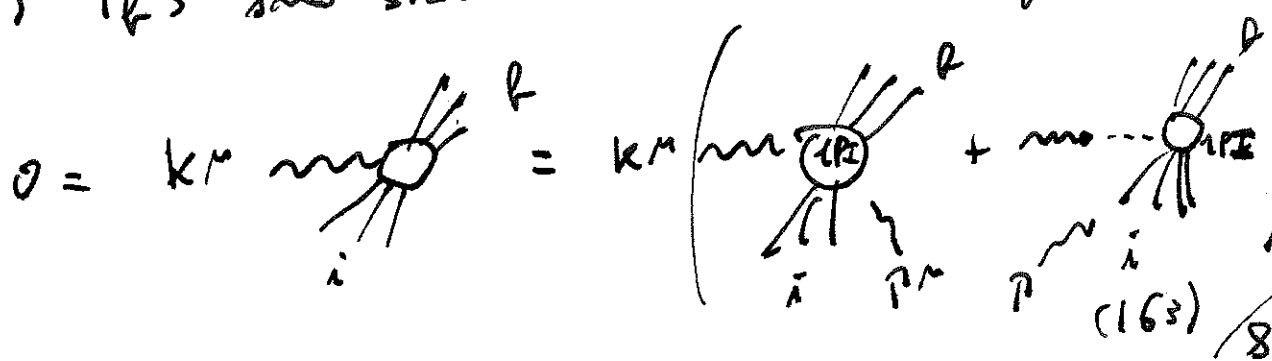
immediatamente che  $m_\pi = f_\pi g$  nel nostro esempio (161)

che è proprio quello che abbiamo trovato

ora usa la lagrangiana esplicita. trovato  
 Considero ora un esempio analogo a quello de posto alla formula di Goldberger - Treiman:

$$\partial_\mu \langle f | J^\mu | i \rangle = 0 \quad (162)$$

dove  $|i\rangle$   $|f\rangle$  sono stati fisici on-shell. Diagrammaticamente abbiamo



ossia in equazioni

$$k^\mu \Gamma^\mu + k^\nu i g F_\nu k^\mu \frac{i}{k^2} \Gamma(k) = 0 \quad (164)$$

Ma ora notiamo che ~~per~~ come un vettore di polarizzazione  
 longitudinale  $\epsilon^- = \left( \frac{k}{m}, 0, 0, \frac{E}{m} \right)$

$$\epsilon^\mu = \frac{k^\mu}{m} \left( 1 + \frac{m}{E} \right) \quad (165)$$

Quindi la Eq. (164) dice che l'ampiezza di scattering  
 $\langle f | i W_\mu \rangle$ , indicando con  $W_\mu$  la componente longitudinale  
 del bosone di gauge massivo, è pari, a meno di un fattore  $g F_\nu$ ,  
 all'ampiezza di scattering  $\langle f | i \pi \rangle$ , indicando  
 con  $\pi$  il bosone di Goldstone non-fisico

# II Rinormalizzazione

## 1. Rinormalizzazione della QED

Prima di affrontare la rinormalizzazione da un punto di vista formale, vediamo l'applicazione sistematica alla QED del metodo discusso nel caso della teoria  $\phi^4$ . Ricordiamo che a livello rinormalizzato tutti i campi ed i parametri della teoria sono scelti come quelli rinormalizzati volte opportune costanti, ed il risultato è risultato come la QED di partenza, ma con i param. rinormalizzati, e dei controtermini. Le tergo o conto della ridefinizione, con parametri fissati dalle condizioni di rinormalizzazione.

Nel caso della QED possiamo ridefinire il campo del fotone, quello dell'elettrone, la carica, e la massa dell'elettrone. Abbiamo quindi quattro costanti da definire scegliendo come segue.

Dapprima ridefiniamo i campi:

$$\psi = \sqrt{Z_2} \psi_n \quad (1)$$

$$A^\mu = \sqrt{Z_3} A_n^\mu \quad (2)$$

La Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} Z_3 (F_n^{\mu\nu})^2 + Z_2 \bar{\psi}_n (i\gamma - m_0) \psi_n - e_0 Z_2 \sqrt{Z_3} \bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_n A_n^\mu \quad (3)$$

dove  $e_0$  ed  $m_0$  sono parametri bare.

I parametri  $Z_2$  e  $Z_3$

possono essere usati per ridefinire i propagatori: infatti se si trovano

calcolato nella teoria bare

$$\text{---} \textcircled{1} \text{---} = \frac{iZ_2}{g-m_0} (1 + O(q-m)) \quad (4)$$

$$\text{---} \textcircled{2} \text{---} = \frac{-iZ_3}{g^2} (1 + O(q)) \quad (5)$$

si può pensare di riassumere  $Z_2$  e  $Z_3$  nei campi, dinotando nella teoria rinormalizzata i residui delle  $f$ -a che pur'è il campo rinormalizzato siano pari ad uno.

Le costanti di accoppiamento sono invece fissate imponendo che i parametri nella lagrangiana bare siano espressi in termini di parametri fisici (risumabili, o comunque non divergenti), cosa che può sempre essere fatta introducendo costanti moltiplicative. Se si usa la forma Eq. (3) della lagrangiana si ha quindi

$$e_0 Z_2 \sqrt{Z_3} = Z_1 \quad e \quad (6)$$

$$Z_2 m_0 = m + \delta m \quad (7)$$

dove  $e$  ed  $m$  saranno fissate da una condizione fisica.

Ponendo ulteriormente

$$\delta_i = Z_i - 1 \Rightarrow Z_i = 1 + \delta_i \quad (8)$$

La lagrangiana diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi - e \bar{\psi} \not{A} \psi \\ & -\frac{1}{4} \delta_3 (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi} (i \delta_2 \not{\partial} - \delta m) \psi - e \delta_1 \bar{\psi} \not{A} \psi \end{aligned} \quad (9)$$

dove ora tutti i campi sono rinormalizzati, e tutti i parametri

sono fisici.

Imponiamo ora le quattro condizioni di rinormalizzabilità che fissano i quattro contotermini: come si è detto, le prime due (che fissano le non. dei campi  $Z_2$  e  $Z_3$ ) si ottengono imponendo che i residui dei propagatori nella teoria rinormalizzata siano eguali al no.

Ricordando che

$$m \circ m = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2(1-\Pi(q^2))}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}(q^2) = m \circ m \quad \text{OPI}$$

$$i\Pi^{\mu\nu} = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \quad (10)$$

ed osservando che (analogamente al caso scalare)

$$\frac{1}{\cancel{D}} = \frac{1}{D} + \frac{\text{OPI}}{D} + \dots = \frac{i}{p-m} \left[ (-i\Sigma(p)) \frac{i}{p-m} + \dots \right]$$

$$= \frac{i}{p-m - \Sigma(p)} \quad \text{il calcolo è fatto in OPI rinormalizzata} \quad \text{OPI} \quad (11)$$

Le condizioni sul residuo sono

$$\left. \Pi(q^2) \right|_{q^2=0} = 0 \quad (C1) \rightarrow \delta_3 \quad (12)$$

$$\left. \frac{d}{dp} \Sigma(p) \right|_{p=m} = 0 \quad (C2) \rightarrow \delta_2 \quad (13)$$

Osservazione importante: la struttura (10) è garantita dalla rid. di Ward, e deve quindi essere preservata dalla rinormalizzazione. È questa struttura a garantire che il fotone non acquisti massa: (x) la seconda condizione si trova sv. sviluppando  $\Sigma(p)$  in serie

di Taylor intorno alla massa fisica

$$p-m \circ \Sigma(p) = p-m \Sigma(m) + (p-m) \frac{d\Sigma}{dp} + \dots \quad (14)$$

$$\text{con } \Sigma(m) + m = m \quad (15)$$

(Nota che la differenza tra le condizioni (12) e (13) è dovuta banalmente al fatto che  $\Pi(q^2)$  ha un fattore di  $q^2$  nella definizione).

~~La condizione sulla massa fisica si ottiene isolando la  $\delta m$  (15) in termini di  $m$~~

$$m = (1 + m) - \delta m \quad (16)$$

ossia

$$\Sigma(m) = 0 \quad (13) \rightarrow \delta m \quad (17)$$

a livello rinormalizzato.

La condizione sulla carica in QED viene di solito imposta definendo come carica dell'elettrone la forza coulombiana nel limite di distanza infinite, ossia se

$$\sum_q \frac{1}{p-p'} = -ie \Gamma^M \equiv \delta^{-1} \delta^{-1} k^{-1} \langle T A \bar{\psi} \psi \rangle \quad (18)$$

è la f. di Green a tre punti *amputata*

$$-ie \gamma^M = -ie \Gamma^M(q=0) \quad (14) \rightarrow \delta_1 \quad (19)$$

(12, 13, 17, 19)

Le condizioni determinano così i cont-termini, i quali a loro volta danno luogo a nuove regole di Feynman:

$$\mu \text{ } \overline{\psi} \psi \quad -i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta_3 \quad (20)$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \quad i \not{p} \delta_2 - \delta m \quad (21)$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \quad -ie \gamma^M \delta_1 \quad (22)$$

## Condizioni su $Z_1$ e $Z_2$ e identità di Ward

Condizione sul vertice base e ricorrendo  
identità di Ward  
Calcolando con la Lagr. ~~incondizionata~~ si trova

$$Z_1 e \Gamma^\mu(0) = e \gamma^\mu$$

Ma prendo

$$\Gamma^\mu(0) = k \gamma^\mu$$

questo implica

$$k = \frac{1}{Z_1}$$

cioè

$$\Gamma^\mu(0) = \frac{\gamma^\mu}{Z_1}$$

Inoltre la struttura generale del  
vertice è  $\gamma^\mu F_1(q) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q^\nu}{2m} F_2(q)$

quindi con  $q=0$   $\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(0)$

Condizione sul propagatore base e ricorrendo  
identità di Ward  
Calcolando con la Lagr. ~~incondizionata~~ si trova

$$\langle T \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{i}{\not{p} - m} Z_2 + 0 \quad (\not{p} - m)$$

L'identità di Ward è dunque

$$\frac{\gamma^\mu}{Z_1} = \frac{\gamma^\mu}{Z_2} \quad \leadsto \quad Z_1 = Z_2$$



$$= (-ie)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{loop} \\ \text{feynman}}}{(-1)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu \frac{i}{k-m} \gamma^\nu \frac{i}{k+q-m} \quad (25)$$

Superficialemente questo integrale diverge quadraticamente. Come abbiamo visto prima, in aspttativo da la divergenza quadratica si cancella, ma resterà comunque una div. logaritmica.

Passiamo quindi in  $d$  dimensioni:  $d = 4 - 2\epsilon$

$$i\Pi^{\mu\nu}(q^2) = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} e^{i q \cdot \mu} \text{tr} \gamma^\mu (k+m) \gamma^\nu (k+q+m) \quad (26)$$

[Dimensione dei campi in  $d$  dimensioni:  $d = 4 - 2\epsilon$

$$[A]^2 [L]^{-2} = [L]^{-d} \Rightarrow [A] = [L]^{\frac{2-d}{2}} = [L]^{-1+\epsilon}$$

$$[\psi]^2 [L]^{-1} = [L]^{-d} \Rightarrow [\psi] = [L]^{\frac{1-d}{2}} = [L]^{-\frac{3}{2}+\epsilon}$$

$$[e][\psi]^2 [A] = [e][L]^{1-d} [L]^{\frac{2-d}{2}} = [L]^{-d}$$

$$\Rightarrow [e] = [L]^{-d+d-1+d/2-1} = [L]^{d/2-2} = [L]^{-2\epsilon}$$

$$e^2 \rightarrow e^2 \mu^{4-d} = e^2 (\mu^2)^{2-d/2} = e^2 (\mu^2)^\epsilon \quad (27)$$

Denominatori: li combiniamo introducendo un parametro di Feynman

$$\times \frac{1}{[k+q]^2 - m^2} + (1-x) \frac{1}{[k^2 - m^2]} = \frac{1}{[k^2 - m^2 + 2xkq + xq^2]} \quad (28)$$

Numeratore: ~~si usano~~ le identità   
 Note de vulgare   
 $\gamma^\mu \gamma^\mu = 2g^\mu_\mu = 2d \quad (29)$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (2-d) \gamma^\nu \quad (30)$$

ecc. Tuttavia <sup>anche</sup> in  $d$  dimensioni  $\text{Tr} 1 = 4$  e  
 quindi  $\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 g^{\mu\nu}$ ;  $\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = \text{come in } 4 \text{ d.}$

Però

$$\text{Tr} \gamma^\mu (k+m) \gamma^\nu (k+l+m) =$$

$$= 4(k^\mu (k^\nu + l^\nu) + k^\nu (k^\mu + l^\mu) - g^{\mu\nu} k_\mu (k+l)^\mu) + 4 m^2 g^{\mu\nu} \quad (31)$$

Abbiamo così

$$i \Pi^{\mu\nu}(q) = - e^2 (\mu^2)^{2-d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{\text{num}}{\text{den}} \quad (32)$$

ponendo

$$l = k + xq \quad (33)$$

$$\text{den} = l^2 - \Delta^2; \quad \Delta^2 = m^2 - x(1-x)q^2 \quad (34)$$

$$i \Pi^{\mu\nu}(q^2) = \mu^2 (4e^2)^{2-d/2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta^2)^2} \left[ (2k^\mu - xq^\mu)(2k^\nu + (1-x)q^\nu) + m^2 g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}(l-xq) \cdot (l+(1-x)q) \right] \quad (35)$$

Ora notiamo che tutti i termini lineari in  $l$  si annullano sotto integrazione, ed inoltre eseguiamo la solita rotazione di Wick  $l^0 = i l_4^E$

Inoltre <sup>osserviamo</sup> che

$$\int d^d l \frac{l^\mu l^\nu}{D(l^2)} = \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int d^d l \frac{l^2}{D(l^2)} \quad \frac{l^2}{D(l^2)} = -\frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int d^d l \frac{l^\mu l^\nu}{D(l^2)} \quad (36)$$

Troviamo così:

$$i \Pi^{\mu\nu}(q^2) = -4(i) e^2 (\mu^2)^{2-d/2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 + \Delta^2)^2} \times \left[ -\frac{2}{d} g^{\mu\nu} l_E^2 + g^{\mu\nu} l_E^2 - 2x(1-x) q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2) \right] \quad (37)$$

perché  $\mu \neq \nu$

Usando le relazioni già note

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(\varepsilon) (\Delta^2)^{-\varepsilon} \quad (38)$$

troviamo

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \Gamma(\varepsilon - 1) (\Delta^2)^{1-\varepsilon} \quad (39)$$

$$i\pi^{\mu\nu}(q^2) = \frac{-4ie^2(\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^1 dx \left[ (\Delta^2)^{1-\varepsilon} g^{\mu\nu} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{d}{2} \Gamma(\varepsilon - 1) \right. \\ \left. + \left( g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2) - 2x(1-x)q^\mu q^\nu \right) (\Delta^2)^{-\varepsilon} \Gamma(\varepsilon) \right] \quad (40)$$

Ora notiamo che

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{d}{2} \Gamma(\varepsilon - 1) &= \left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma(\varepsilon - 1) \\ &= (1 - \varepsilon) \Gamma(\varepsilon - 1) \\ &= -(\varepsilon - 1) \Gamma(\varepsilon - 1) = -\Gamma(\varepsilon) \end{aligned} \quad (41)$$

e dunque

$$i\pi^{\mu\nu}(q^2) = \frac{-4ie^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{\Delta^2}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \left( -\Delta^2 g^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + (m^2 + x(1-x)q^2) g^{\mu\nu} - 2x(1-x)q^\mu q^\nu \right) \\ = \frac{-4ie^2}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{\Delta^2}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) 2x(1-x) (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$$

Notiamo che: 1) la divergenza quadratica si è cancellata  
 2) è emerso il proiettore trasverso come richiesto dalla id. di Ward.  
 Questo in particolare implica che è sparita la dip. dalla massa del fermione, il che garantisce l'invarianza. (9)

Abbiamo così, usando le eq. (10) e (41),

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma(\epsilon) \left(\frac{\mu^2}{\Delta^2}\right)^\epsilon \\ &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma(\epsilon) \left(\frac{\mu^2}{\Delta^2}\right)^\epsilon \end{aligned}$$

con  $d = 4 - 2\epsilon$ ,  $d = e^2/4\pi$

$$= -\frac{2d}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \delta \right) - \ln \frac{\Delta^2}{\mu^2} \right] + O(\epsilon) \quad (42)$$

Da questa espressione possiamo immediatamente leggere  $\delta_3$  e  $Z_3$ .  
Nella teoria rinormalizzata abbiamo

$$\Pi_R(q^2) = \Pi(q^2) - \delta_3 = \cancel{\pi} - \cancel{\mu^2} \quad (43)$$

quindi la condizione Eq. (12) implica immediatamente

$$\delta_3 = \Pi(0) = \quad (44)$$

$$= -\frac{2d}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \delta \right) - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] + O(\epsilon) \quad (45)$$

$$= -\frac{d}{3\pi} \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \delta \right) - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] \epsilon \quad (45')$$

$$\Pi_R(q^2) = +\frac{2d}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{\Delta^2}{m^2}$$

Notiamo che la rinormalizzazione della carica dell'elettrone  $e^2$

dato da

$$\begin{aligned} e^2 &= Z_3 e_0^2 \\ &= (1 + \delta_3) e_0^2 \end{aligned} \quad (46)$$

le ai correzioni e la ai interazioni vengono discusse / 42

in dettaglio più avanti. Una osservazione interessante è che questo risultato ci permette di verificare esplicitamente il teorema ottico. Notiamo innanzitutto che  $\Delta^2$  è la stessa quantità già considerata nella seq. I. 1, Eq. (15):

$$\Delta(q^2) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \right) \quad (47)$$

Ne segue che la self-energia ha un taglio che inizia a  $q^2 = 4m^2$  (48)

ossia la soglia per la produzione di una coppia  $e^+e^-$ .

Calcoliamo inoltre la discontinuità, ossia  $\text{Im} \Pi(q^2)$  quando  $m^2 < x(1-x)q^2 < 0$ . (49)

Abbiamo da  $\text{arg}$  l'argomento del logaritmo è negativo per

$$\frac{1}{2}(1-\beta) < x < \frac{1}{2}(1+\beta); \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \quad (50)$$

Visto che  $\text{Im} \ln(-k \pm i\epsilon) = \pm \pi$  se  $k > 0$  si ha \*

$$\text{Im} \Pi(q^2 \pm i\epsilon) = \mp \frac{2\alpha}{\pi} \int_{\frac{1}{2}(1-\beta)}^{\frac{1}{2}(1+\beta)} dx x(1-x) = \quad x = \frac{1}{2} + y$$

$$= \mp 2\alpha \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1+\beta}{2}} = \mp 2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy \left( \frac{1}{4} - y^2 \right) =$$

$$= \mp 2\alpha \left( \frac{1}{4} y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-\beta/2}^{\beta/2} = \mp \alpha \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{3} \left( 1 + \frac{2m^2}{q^2} \right) \quad (51)$$

Ma ricordando che  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$

Ora ricordiamo che, definita l'ampiezza  $M(p_1, p_2 \rightarrow p_1', p_2')$  abbiamo trovato

$$|M|^2 = e^4 \left[ (1 + \cos^2 \theta) + \frac{m^2}{E^2} (1 - \cos^2 \theta) \right]$$

Questa deve soddisfare il teorema ottico

$$\frac{\int d^3 p \hbar}{2E(2\pi)^3} |M|^2 = 2 \text{Im} M$$

Ora l'ampiezza  $M$  è legata alla self-energia da

$$iM = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\pi} \text{Im} \Sigma(p) = G i e^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \gamma_\mu \frac{1}{q^2} \gamma_\nu \frac{(-i)}{q^2} \bar{v}(p) \gamma_\nu u(p)$$

ovvero  $q^2 = s$ .

$$= \frac{i e^2 \pi (q^2)}{q^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \gamma_\mu \bar{v}(p) \gamma_\nu u(p) q^2 =$$

$$= \frac{i e^2 \pi (q^2)}{q^4} q^2 \frac{1}{4} \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu) =$$

$$= \frac{i e^2 \pi (q^2)}{q^4} \left(-\frac{1}{2}\right) q^2 (p_1 \cdot p_2 + m^2)$$

$$= -\frac{i e^2}{2} \pi (q^2)$$

matrice che posso  
andare a zero  $m \rightarrow 0$  -  
il ris. non ne può  
dipendere

Dunque si deve avere

$$- \text{Im} e^2 s^2 \pi (s^2) = \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{2E(2\pi)^2 2E_c} |M|^2$$

Verifica esplicita:

r.h.s.:

$$2\pi \int_0^\pi \frac{d^3k}{4E^2 4\pi^2} k^2 d\cos\theta \delta(E - 2\sqrt{k^2 + m^2}) |M|^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{4\pi^2} \int \frac{d^3k d\cos\theta}{8E^2} k^2 \delta(E - 2\sqrt{k^2 + m^2}) |M|^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{dE}{E} k d\cos\theta \delta(E - 2\sqrt{k^2 + m^2}) |M|^2 =$$

$$= \frac{\pi d^2}{4} \int d\cos\theta \sqrt{\frac{1 - m^2}{E^2}} \left[ (1 + \cos^2\theta) + \frac{m^2}{E^2} (1 - \cos^2\theta) \right]$$

$$= \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{1 - m^2}{E^2}} \left( 2 + \frac{2}{3} + \frac{m^2}{E^2} \left( 2 - \frac{2}{3} \right) \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \pi d^2 \sqrt{\frac{1 - m^2}{E^2}} \left( 1 + \frac{m^2}{2E^2} \right)$$

l.h.s.

$$\text{Disc} - \text{Im } e^2 \pi = \frac{\alpha}{2 \cdot 3} e^2 \int \sqrt{\frac{1 - m^2}{E^2}} \left( 1 + \frac{m^2}{2E^2} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \pi d^2 \sqrt{\frac{1 - m^2}{E^2}} \left( 1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) \text{ Q.E.D.}$$

## 2. Rimondabilità e invarianza di scala

La rimondabilità rompe l'invarianza di scala se questa è presente a livello classico, e più in generale cambia le proprietà di scala della teoria quantistica rispetto a quella classica.

Ritorniamo che a livello classico le costanti di Noether associate all'invarianza per dilatazioni si può costruire una legge.

Una dilatazione è un riscalamento di campi e coordinate secondo la loro dimensione canonica:

$$x^\mu \rightarrow e^{-\alpha} x^\mu = x'^\mu; \quad (57)$$

$$p^\mu \rightarrow e^{+\alpha} p^\mu = p'^\mu \quad (58)$$

$$\varphi'(x') = e^{\alpha d} \varphi(x) \quad (59)$$

dove  $d$  è la dimensione del campo in unità di massa.  
(inoltre  $x$  ha dim. 1 in unità di massa)  
 Le variazioni per traslazioni infinitesime sono quindi:

$$\delta x^\mu = -\alpha x^\mu$$

$$\delta p^\mu = \alpha p^\mu$$

$$\delta \varphi = \varphi'(x) - \varphi(x)$$

$$= \varphi'(e^\alpha x^\mu) - \varphi(x)$$

$$= \varphi'((1+\alpha)x^\mu) - \varphi(x)$$

$$= \varphi'(x') + \alpha x^\mu \partial_\mu \varphi - \varphi(x)$$

Equivalent, more elegant

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(x) &= e^{\alpha d} \varphi(x - \delta x) \\ &= (1 + \alpha d - \delta x^\mu \partial_\mu) \varphi(x) \\ &= (1 + \alpha d + \alpha x^\mu \partial_\mu) \varphi(x) \\ \delta \varphi &= \varphi'(x) - \varphi(x) = \\ &= (\alpha d + \alpha x^\mu \partial_\mu) \varphi(x) \end{aligned} \right\}$$

$$= \alpha (x^\mu \partial_\mu + d) \varphi(x)$$

(Nota che  $x \frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^\alpha$ , quindi il  $(-)$  davanti al primo termine di  $\delta \varphi$  è  $(\frac{d}{dx})^\alpha$ )  
 Manifestamente una quantità è invariante per dilatazioni se e solo se è adimensionale. Quindi l'invarianza di dilatazioni vale per teorie con costanti d'accoppiamento adimensionali e campi senza

massa, o nel limite in cui tutte le masse sono trascurabili rispetto all'energia. In tal caso vi è una corrente conservata (ad invar. di scala se e solo se i p.m. sono tutti positivi)  $\rightarrow$  allora (ad invar. di scala se e solo se i p.m. sono tutti positivi)  $\rightarrow$  allora (ad invar. di scala se e solo se i p.m. sono tutti positivi)

$$j^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu$$

$$= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} x^\nu \partial_\nu \phi - \mathcal{L} x^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \phi$$

$$= x^\nu T_{\nu\mu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \phi \quad (61)$$

dove  $T^{\mu\nu}$  è il tens. energia-impulso.  
 Osserviamo che per un campo scalare  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$  è quindi  
 l'ultimo termine si può scrivere come  $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} (\partial_\mu \phi) \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu (\phi^2)$ .  
 Si tratta quindi di una derivata totale che non contribuisce alla carica. Si dimostra che ciò è vero in generale, e

quindi

$$j^\mu_D = x^\nu T_{\nu\mu} \quad (62)$$

Notiamo che ciò implica

$$\partial_\nu j^\nu_D = T^\mu{}_\mu \quad (63)$$

È facile verificare che questo è corretto ad es. per un campo scalare:

$$T^\mu{}_\mu = 2m^2 \phi^2 - \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi \quad (64)$$

$$= 2m^2 \phi^2 + \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi$$

$$= m^2 \phi^2 + \phi (\partial_\nu \partial^\nu \phi)$$

$$= m^2 \phi^2$$

Quindi vi è invarianza di scala quando  $m=0$

Consideriamo ora le identità di Ward associate all'invarianza di scala, nel caso di una teoria con parametri e dimensioni (normalizzabile). Il caso non-normalizzabile è interessante, ma intricato (6R esatto).

Se l'invarianza di scala è rotta da termini di massa abbiamo

$$\partial_\mu j_0^\mu = O_m \quad (65)$$

Ad es., nella teoria scalare massiva  $O_m = m^2 \phi^2$ .

In generale,  $\lim_{m \rightarrow 0} O_m = 0$  e  $[O_m] = F_0(j^\mu) = [M]^d$

Si ha

$$\partial_\mu \langle T j_0^\mu \phi_1 \dots \phi_n \rangle = \langle O_m \phi_1 \dots \phi_n \rangle + \sum_i \delta(x_i - x) \langle \delta \phi_i(x_i) \dots \phi \dots \rangle \quad (66)$$

Integrando su  $x$ , si ha, scartando il termine di superficie e notando che la dip. da  $x$  è solo nelle  $\delta$  di Dirac e in  $O_m$

$$\sum_i \langle T \delta \phi_i \dots \rangle = - \langle (\int \delta^d x O_m) \phi_1 \dots \phi_n \rangle \quad (67)$$

Notiamo da questa equazione ci sta dicendo che, a parte il termine  $O_m$ , le funzioni di Green scalari sono previste dall'analisi dimensionale. Infatti

$$\sum_i \langle T \delta \phi_i \dots \rangle = \left[ \sum_i x_i^\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} + d_i \right] \langle T \phi_1 \dots \phi_n \rangle \quad (68)$$

ossia, anche nel limite  $m=0$

$$\sum_i x_i^\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} G(x_1 \dots x_n) = - \sum_{i=1}^n d_i G(x_1 \dots x_n) \quad (69)$$

che esprime il fatto che se la teoria è invariante di scala, sotto riscalamento degli impulsi le funzioni di Green si trasformano secondo l'analisi dimensionale dei campi associati, come in una teoria libera.

Osserviamo che nel limite di alta energia il termine di massa è sempre trascurabile.

Inoltre  $\int d^4x \mathcal{O}_m$  è adimensionale, dunque

$$\int d^4x \mathcal{O}_m \sim \frac{m^2}{p^2} \sim 0 \quad (70)$$

Consideriamo ora le funzioni di Green proprie. Ricordiamo

che

$$\Gamma = \int d^4p_1 d^4p_2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \mathcal{O}(p_1) S^{-1} \mathcal{O}(p_2) + \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3) \mathcal{O}(p_1) \Gamma^{(2)}(p_1, p_2, p_3) \mathcal{O}(p_2) \mathcal{O}(p_3) + \dots$$

dove  $\Gamma^{(2)}$  è ottenuto computando gli  $n$  propagatori esterni.

Visto che  $\Gamma$  è adimensionale, trascurando i termini

di massa vediamo che

$$\sum_i p_i + 2 \int \frac{d^4p_i}{p_i^2} \Gamma = \left[ \sum_i (-d_i) + 4 \right] \Gamma \quad (71)$$

$$= D \Gamma \quad (72)$$

In particolare ad esempio nella teoria  $\phi^4$   $\Gamma^{(4)} = ig$ ,  $D = 0$ . Concludiamo che  $\Gamma^{(4)}$  è una costante numerica indip. dagli impulsi. Ma il calcolo esplicito ci dice che questo non è vero.

D'altra parte, sappiamo per de-:  $\rho^{(k)}$  e- diverge, e da  $\rho^{(k)}$  fisica e- espressa introducendo una scala dimensionale  $\mu$ . ~~La presenza di questa~~ scala rompe l'invarianza per dilatazioni, e questo invalida l'argomento precedente. In un formalismo funzionale questo può essere visto come conseguenza della non-invarianza sotto dilatazioni della misura di integrazione.

La forma corretta dell'id. di Ward verrà vista più avanti. Per ora, consideriamo prima un caso particolarmente semplice, in cui le leggi di scala possono essere determinate esplicitamente.

Consideriamo in particolare il caso di un elemento di matrice  $S$ .

$$\int_{\mu} \langle f | S_{\Delta}^{\mu} | i \rangle \quad (73)$$

$$= \int_{\mu} \langle f | \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \left( \frac{1}{\Delta} \right) | i \rangle$$

che possiamo vedere come il modello di tentativi irriducibili. Calcoliamo in particolare la dip. da un riscalamento di  $\mu$  di una probabilità per un processo dipendente da una sola scala, come una set. d'into totale:

~~$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \mu} \langle f | S_{\Delta}^{\mu} | i \rangle = \langle f | S_{\Delta}^{\mu} | i \rangle^2 (S, g, \mu) = \quad (74) \\
 & = \int_{\mu} \langle f | S_{\Delta}^{\mu} | i \rangle^2 (S, g, \mu)
 \end{aligned}$$~~

dove abbiamo supposto che vi sia un unico parametro  $g$  nella teoria e nell'altro

$$\sum_i p_i^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^{\mu}} \langle \psi | i \rangle^2 = \sum_i p_i^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^{\mu}} \hat{\sigma}(s, g, \mu) \quad (74)$$

dove abbiamo chiedo  $\hat{\sigma}$  la quantità perché è una probabilità e non una sez. d'imp. vera e propria (è adimensionale), abbiamo supposto che dipenda da un unico accoppiamento  $g$ , ed abbiamo indicato esplicitamente la dipendenza da una variabile cinematica dimensionale  $s$ , dall'accoppiamento e dalla scala di riarmo  $\mu$ .  
L'analisi dimensionale indica che  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(s, g, \mu)$ ,  
~~osservando che  $g$  dipende anche da  $\mu$ , e dunque~~

$$\sum_i p_i^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^{\mu}} \hat{\sigma} = -\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \hat{\sigma} = \frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial s} \hat{\sigma} \quad (75)$$

Ora però possiamo fare due osservazioni:

- 1) la derivata è una derivata parziale perché anche  $g$  dipende da  $\mu$ ,  $g = g(\mu)$
- 2) la dip. totale da  $\mu$  si deve cancellare perché un'osservabile fisica (una probabilità misurabile) non può dipendere da una scala convenzionale come  $\mu$ .

$$\mu \frac{d}{d\mu} \hat{\sigma}(s, g, \mu) = 0 \quad (76)$$

Ma questo implica

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dg}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g} \right) \hat{\sigma} = 0 \quad (77)$$

ossia

$$\left( s \frac{\partial}{\partial s} - \mu^2 \frac{dg}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g} \right) \hat{\sigma} = \left( s \frac{\partial}{\partial s} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \hat{\sigma} = 0 \quad (78)$$

avendo definito la funzione  $\beta$ :

$$\beta(g) \equiv \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g \quad (79)$$

Notiamo che  $\beta = \beta(g)$  se la costante d'accoppiamento  $g$  è adimensionale, mentre  $g$  può dipendere da  $\mu$ , ma non da  $s$  che dipende dal processo specifico.

È facile risolvere la Eq. (78). Soluzione "fisica":

osserviamo che  $\hat{\sigma}(\frac{s}{\mu^2}, a_\mu)$  non dipende da  $\mu$ .

Ma dunque possiamo scegliere  $s = \mu^2$ , il che ci dice che  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(1, a_s)$ . Soluzione formale: definiamo  $g_R(s)$  come la soluzione dell'eq.

$$s \frac{d}{ds} g_R(s) = \beta(g_R(s)) \quad (80)$$

con la condizione iniziale

$$g_R(\mu^2) = g_{\mu^2} \quad (81)$$

che dà

$$\ln \frac{s}{\mu^2} = \int_{g_{\mu^2}}^{g_R(s)} \frac{1}{\beta(\bar{g})} d\bar{g} \quad (82)$$

Vediamo che  $g_R(\frac{s}{\mu^2}, g_\mu)$  soddisfa la Eq. (78),

infatti la  $g_R$  è definita implicitamente da come funzione di

$$g_\mu \text{ da } F(g_R, g_\mu) = 0 \quad (83)$$

$$F = \int_{g_{\mu^2}}^{g_R(s)} \frac{1}{\beta(\bar{g})} d\bar{g} - \ln \frac{s}{\mu^2} \quad (84)$$

$$\text{Dunque } \frac{\partial g_R}{\partial g_\mu} = - \frac{\partial F / \partial g_\mu}{\partial F / \partial g_R} = \frac{\beta(g_R)}{\beta(g_R(\mu^2))} \quad (85)$$

da cui segue

$$\beta(g_{r,1}) \frac{\partial g_R}{\partial g_{r,2}} = \beta(g_R) = \frac{5}{2} \frac{g_R}{\mu} (s) \quad (86)$$

secondo la Eq. (78). Dunque

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(g_R(s, g_{r,1})) \quad (87)$$

e la soluzione generale della (78), in accordo con l'argomento "fisico".

### 3. Funzione $\beta$ e costante d'accoppiamento renorm

L'argomento formale per capire che la soluzione dell'eq. di GR consiste di fatto nel promuovere la scala  $\mu^2$  a scala fisica ottenendo così una cost. d'accoppiamento variabile.

Per capire il significato, calcoliamo la funzione  $\beta$  in QED e  $\Phi^4$ . In  $\Phi^4$  ricordiamo che abbiamo rinormalizzato sia con una coordinata fisica, sia  $\overline{MS}$ . La rinormalizzazione è stata

ad R. b. fisica (capiamo ora) a livello di  $\Gamma^{(4)}$ :

$$\Gamma^{(4)} = -ig \langle \text{diagrammi} \rangle F(s, t) \quad (88)$$

a) Rin. fisica  $F(s, t) = [-ig[V(s) + V(t) + V(u)]]$  (89)

~~$g_1$~~   $F(s_0, t_0, u_0) = g_{phys}$   
 con  $\mu^2(s_0) = \mu^2(t_0) = \mu^2(u_0) = \mu^2$  (90)

$$F(s_0, t_0, u_0) = 1 + \frac{g_1}{32\pi^2} \left( 3 + 3 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \quad (90)$$

b) Rin.  $\overline{MS}$   $g_{\overline{MS}} = g_0 \mu^{-2\epsilon} \left( 1 - \frac{3}{32\pi^2} g_0 \mu^{-2\epsilon} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4 \right) \right)$  (91)

$$g_\mu = g_0 \mu^{-2\epsilon} \quad (92) \quad (10)$$

Calcoliamo in entrambi i casi la f. beta. Notiamo che i due casi corrispondono a diverse regolarità ed a diverse rinormalizzazioni.

Nel primo caso abbiamo

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} g_{phys} = \frac{3g^2}{32\pi^2} (1 + O(g)) \quad (89)$$

dove a meno di  $O(g)$  abbiamo posto  $g_1 = g_{phys}$ .

Nel secondo

$$\mu^2 \frac{\partial g}{\partial \mu^2} = -\epsilon g + 2 \frac{3}{32\pi^2} g^2 \quad (90)$$

dove abbiamo posto  $g_\mu \equiv g_0 \mu^{-2\epsilon}$ . Notiamo però che nel primo caso non possiamo porre  $g_\mu = g_{\overline{MS}}$  perché stiamo calcolando all'ordine  $g^2$ .  
Risostituendo la eq. (88) nella forma  $g_\mu = g_{\overline{MS}} (1 + \frac{3}{32\pi^2} g_{\overline{MS}} (\frac{1}{\epsilon}))$

troviamo

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} g_{\overline{MS}} = \frac{3}{32\pi^2} g_{\overline{MS}}^2 (1 + O(\epsilon)) \quad (91)$$

Notiamo che in questo caso ~~non è necessario~~ ~~basarsi sulle altre~~ ~~condizioni~~ ~~sono~~ ~~comm.~~  $O(\epsilon)$ , e l'identificazione della scala di rinom. è reg. comporta una leggera complicazione della procedura.

Notiamo anche che, poiché come si è visto,  $\beta = \beta(g)$ , ne segue che solo a partire da NLO il risultato può dipendere dallo schema di rinormalizzazione, in quanto  $g_1 = g_2 (1 + O(g_1))$  dove  $g_1$  e  $g_2$  sono definite in diversi schemi.

Abbiamo così

$$\beta(g) = -\beta_0 g^2 + O(g^3) \quad (92)$$

$$\beta_0 = -\frac{3}{32\pi^2}$$

Consideriamo ora il caso della QED.

In questo caso, avendo rinormalizzato la teoria in modo sistematico, è sufficiente far uso della condizione di rinormalizzazione eq. (24) con la costante eq. (44) + (46)

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] \quad (93)$$

Notiamo che di fatto questo ci dice che avendo rinormalizzato la carica a distanza infinita e la massa fisica (statica) dell'elettrone a giocare il ruolo di punto di rinormalizzazione. Se avessimo invece scelto lo schema  $\overline{MS}$  avremmo invece definito la carica calcolando la f. di vertice nella teoria rinormalizzata (cioè con campi  $A_\mu$  quindi con fattori  $Z_2$  e  $\sqrt{Z_3}$ ) e sottratto il polo. Dobbiamo quindi calcolare la variazione della costante di accoppiamento con  $m^2$ . Abbiamo

$$\beta(\alpha) = m^2 \frac{d\alpha}{dm^2} = \frac{\alpha^2}{3\pi} = -\beta_0 \alpha^2 \quad (\beta_0 = -\frac{1}{3\pi}) \quad (94)$$

Determiniamo ora esplicitamente la costante di accoppiamento osservando che la struttura del risultato è la stessa per QED e QCD in quanto in entrambi i casi la f. beta è quadratica. Si ha, dalla Eq. (79)

$$\begin{aligned} \ln \frac{\alpha^2}{\mu^2} &= \int \frac{dg}{\beta(g)} \\ &= -\frac{1}{\beta_0} \int \frac{dg}{g^2} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{1}{g^2} \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0 g(\alpha)} - \frac{1}{\beta_0 g(\mu^2)} \end{aligned} \quad (95)$$

con soluzione (96)

$$g_R(Q^2) = \frac{g_R(\mu^2)}{1 + \beta_0 g_R(\mu^2) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (96)$$

o (97)

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 + \beta_0 \alpha(Q_0^2) \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}} \quad (97)$$

Per capire il significato di questo risultato, ricordiamo l'esperienza per il vertice OPI in teoria  $q^2$

$$\Gamma^{(4)}(s, t) = g \left( 1 + \frac{g}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left( \ln \frac{M^2(s)}{\mu^2} + \ln \frac{M^2(t)}{\mu^2} + \ln \frac{M^2(x)}{\mu^2} \right) \right) = g F(s, t) \quad (98)$$

con  $M^2(p^2) = m^2 - p^2 x(1-x)$

D'altra parte l'argomento di GR a due de nel limite di alta energia

$$\langle \mathcal{P}(i) \rangle^2 = F(g_R)$$

Ma noi sappiamo che a LO

$$\langle \mathcal{P}(i) \rangle^2 = \int d\Omega \frac{k^2 dk}{4 E^2 (2\pi)^2} \delta(2E - 2k) g^2 = \frac{g^2}{8\pi} \quad (99)$$

e dunque

$$\langle \mathcal{P}(i) \rangle^2 = \frac{g_R^2}{8\pi} \quad (100)$$

Ma ora osserviamo che

$$g_R(s) = g_R(\mu^2) \left( 1 + \frac{3}{32\pi^2} g_R(\mu^2) \ln \frac{s}{\mu^2} \right) + O(g_R^3) \quad (101)$$

Osserviamo inoltre che nell'SR del CR

$$s \approx 4E^2$$

$$t \approx -2E^2(1 - \cos \theta)$$

(101)

$$u \approx -2E^2(1 + \cos \theta)$$

Si vede

$$\ln \frac{s}{\mu^2} = \ln \frac{t}{\mu^2} = \ln \frac{u}{\mu^2} (1 + O(\ln^0)) \quad (102)$$

$$\text{e } \ln \frac{t}{\mu^2} = \ln p^2 + (1 + O(\ln^0)) + O\left(\frac{u^2}{\mu^2}\right)$$

Dunque

$$\Gamma^{(4)}(s, t) = g \left( 1 + \frac{3g}{3\pi^2} \ln \frac{s}{\mu^2} \right) + O(g^3) + O(\ln^0) + O\left(\frac{u^2}{E^2}\right) \quad (103)$$

de e' proprio lo sviluppo al primo ordine di  $g_R$ .


Quindi la sostituzione "RG improved"  $g \rightarrow g_R(s)$  e' equivalente a includere a tutti gli ordini il contributo alle osservabili fisiche con la piu' alta potenza del log della scala fisica, a meno di correzioni di massa e di correzioni di ordine superiore in  $g$ .

Osserviamo ora che se includiamo nella lit.  $\beta$  la prima correzione abbiamo

$$\ln \frac{Q^2}{\mu^2} = \sqrt{\frac{1}{g(\mu^2)}} \frac{1}{\beta_0 g^2} (1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g) = \frac{1}{\beta_0 \beta_1 g} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln g$$

$$\text{da cui } \frac{1}{g(Q^2)} = \frac{1 + \beta_0 g \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \beta_1 / \beta_2 \ln \frac{g(Q^2)}{g(\mu^2)}}{g(\mu^2)} \quad (104)$$

(105) / (106)

~~che ha un l. d'asse. Quindi  $\beta_0$  è anch'esso subleading log~~  
 Notiamo che poiché  $\beta_0 < 0$ , ne segue che la cost. d'accoppiamento  
 cresce a certa distanza. Possiamo interpretare questo come  
 un effetto di screening di coppia regito da polarizzazione del vuoto,  
 che schermava la carica a lunga distanza: a certa distanza  $n$   
 vede la carica "nuda", più grande. Si dimostra che  $\beta_0 < 0$   
 per tutte le teorie, eccetto le teorie di gauge non abeliane, per cui  
 c'è un effetto di antiscreening dovuto ai diagrammi  e  
~~ghost~~. La forma generale nel caso non-abeliano è

$$\beta_0 = \frac{1}{12\pi} (11C_A - 4n_f T) \quad (102)$$

dove  $C_A$  è l'op. di Casimir <sup>quadratica</sup> per la rapp. aggiunta. (il  $\beta_0$  è  
 quadratico e diretto come  $C_A \equiv \sum_a T_a T_a$ ) e  $T$  è dato da  
 $\text{tr } T_a T_b = T \delta_{ab}$ . Per  $SO(N)$  abbiamo  $C_A = N$ ,  $T = 1/2$

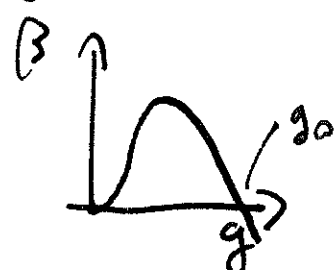
$$\beta_0 = \frac{1}{12\pi} (33 - 2n_f)$$

e in QED prendendo  $C_A = 0$ ,  $T = 1$ , si ritrova il risultato Eq. (94).

Distinguiamo ora che cosa possiamo aspettarsi nei due casi,  
 di cost. d'accoppiamento che cresce con la scala (come in QED) o  
 che decresce (come per la TAN).

Nel caso di costante di accoppiamento che cresce al crescere della  
 scala, osserviamo innanzitutto che quando  $g \gg 1$  il calcolo  
 perturbativo della costante d'accoppiamento diventa inaffidabile.

In tal caso non possiamo escludere che l'andamento  
 della  $\beta(g)$  sia come in figura:



In tal caso, la cost. d'accoppiamento ad alta energia prende il valore  $g_0$  (punto fisso UV stabile). Nel caso di  $\phi^4$  e QED non vi è alcuna evidenza che ciò succeda. In tal caso la cost. di accoppiamento diverge: usando l'espressione LO la divergenza avviene quando

$$1 + \beta_0 g(m^2) \ln \frac{Q^2}{m^2} = 0 \quad (96)$$

Poiché  $\alpha(m^2) = \frac{1}{137}$  e  $\beta_0 = \frac{-1}{3\pi}$  questo corrisponde ad un valore non-fisico  $\frac{Q^2}{m^2} \sim \exp 1000 \sim 10^{300}$ .

Quanto vuol dire che se insistiamo che il valore della costante di accoppiamento sia finito a tutte le scale, siamo obbligati a supporre che la cost. d'accoppiamento si annulli (triviale).

Il modo in cui questo problema si risolve per la QED fisica è notando che ad alta scala la QED è uschia con l'intensità debole: la QED a bassa scala esiste come teoria indipendente solo nel limite di decoupling. Per capirlo, torniamo alla br.  $\beta$  in  $\phi^4$ . Ricordiamo che con nostra definizione fisica della cost. d'accoppiamento (che quindi usa la sca. d'onda)

$$g_{ph(\mu)} = g_1 \left( 1 + \frac{3g_1}{32\pi^2} \left( \int_0^1 dx \ln \frac{\mu^2(x)}{\Lambda^2} + 1 \right) \right) \quad (97)$$

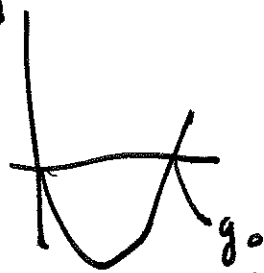
Ma  $\mu^2 = m^2 - p^2 x(1-x)$  e quindi se  $p^2 \ll m^2$

$$\ln \frac{m^2 - \mu^2 x(1-x)}{\Lambda^2} = \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln \left( 1 - \frac{\mu^2}{m^2} x(1-x) \right) =$$

$$= \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - \frac{\mu^2}{m^2} x(1-x) + O\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \quad (98)$$

e quindi  $\beta(g) = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g(\mu^2) = O\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)$ . Pertanto la  
 b.  $\beta$  si annulla nel limite  $\mu \ll m$ . Ne segue che il contributo  
 di corpi pesanti alla b.  $\beta$  non si vede a basso energia: la  
 QED ad alta energia si unifica con l'interazione EW.

Consideriamo ora il caso di una teoria in cui  $\alpha$  decresce con la  
 scala. In questo caso, in linea di principio sarebbe possibile  
 un andamento come  $\beta$  (punto fisso IR stabile),



per il quale non c'è però evidenza per teorie  $5d(N)$ .  
 Come se sia, in queste teorie quando  $Q^2 \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  (libera  
 aristotela) e quindi in linea di principio una teoria di questo tipo può  
 essere vera a scale arbitrariamente alte, con una cost. di  
 accoppiamento  $\alpha \sim \frac{1}{Q^2}$ . Più o meno utile, per queste  
 teorie, eliminare completamente la dip. da  $\mu$ , definendo  $\Lambda$  come  
 la "scala della teoria":

$$1 + \beta_0 \alpha(\mu^2) \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} = 0 \quad (99)$$

Si ha

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \beta_0 \alpha(\mu^2) \left( \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)} = \frac{1}{\beta_0 \ln Q^2 / \Lambda^2} \quad (100)$$

de nostra explicitate case  $\alpha \sim \beta$ , e quindi la immagine  
Et sia sempre necessaria nella regione in cui la cost. di appiamento  
e perturbata. Questa scala si presta tuttavia male alla generaliz-  
~~zione~~ al di là dell'  $\alpha$ , dove si può convenientemente esprimere  
a termini del suo valore col ma scala d'ordine. In alcuni  
i casi si sostituisce al parametro  $\alpha$  <sup>(costante)</sup> ~~il parametro~~  
una famiglia ad un parametro (base: mixing coeff.) deter-  
mata da una costante dimensionale (trasmutazione dimensionale)

#### 4. L'equazione di Callan-Symanzik

Torniamo ora all'identità di Ward, che avremo scritto ~~ora~~ nello spazio delle posizioni, e che nello spazio degli impulsi prenderebbe la forma

$$\sum_i p_i^\mu \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} G^{(n)}(p_1 \dots p_n) = D G^{(n)}(p_1 \dots p_n) \quad (101)$$

Ora capiamo che questa relazione è corretta solo trascorrendo gli effetti della rinormalizzazione, cioè al tree.

Ad esempio 
$$G^{(2)}(p^2) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2)} \quad (102)$$

vediamo subito che

$$p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} G^{(2)}(p^2) = -2 G^{(2)}(p^2) + O\left(\frac{m^2}{p^2}\right) + \frac{p^\mu}{p^2} \frac{+\Sigma(p^2)}{\partial p^\mu (p^2 - m^2 - \Sigma(p^2))^2} \quad (103)$$

~~Ma la dipendenza dalla scala è ancora diversa~~

Ma ora notiamo che

$$G^{(2)}(p^2) = \langle T \varphi \varphi \rangle = \frac{1}{2\varphi} \langle T \varphi_0 \varphi_0 \rangle \quad (104)$$

dove 
$$\varphi_0 = \sqrt{2\varphi} \varphi \quad (105)$$

è il campo bare. Ma la dipendenza è ora dalla scala

Notiamo ~~che~~ ~~la~~ ~~dipendenza~~ ~~è~~ ~~manifestamente~~

$$p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \langle T \varphi_0 \varphi_0 \rangle = \dots$$



possiamo ricavare da (106) come

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu} G = -\gamma G \quad (107)$$

avendo per semplicità omissa l'indice  $(n)$  visto che l'argomento vale per una b.d. Geen generica.

Notiamo ora che lo stesso argomento che implica che  $\beta$  è solo funzione di  $g$  implica che anche  $\gamma$  lo è, in quanto  $\gamma$  è interamente determinata dalla costante di rinormalizzazione, che non dipende dalla cinematica ma unicamente dalle condizioni di rinormalizzazione.

Concludiamo dunque che  $\gamma$  in generale ha la forma

$$\gamma(g) = \gamma^{(0)} g + \gamma^{(1)} g^2 + \dots \quad (108)$$

dove  $\gamma^{(i)}$  sono costanti finite.

Possiamo dunque scrivere l'eq. di Callan-Symanzik, o eq. del GK

$$\left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma(g) \right] G = 0 \quad (109)$$

(nel semplice caso di un solo parametro

Distintamente la soluzione per una b.d. Geen che dipende da una sola variabile dimensionale, che chiameremo  $s$  come nel caso della  $\hat{\sigma}$  ~~proprietà~~:  $G(\sum_{i=1}^s g_i^2)$ .

Procedendo come nel caso precedente abbiamo

$$s \frac{dG}{ds} = \left( \beta \frac{\partial}{\partial s} + \gamma \right) G \left( \frac{s}{\mu^2}, g_1 \right) \quad (110)$$

Come prima possiamo risolvere in modo spiccato  
notando che se poniamo  $\mu^2 = s$  la dipendenza da  $\mu^2$   
attraverso  $g$  scompare e abbiamo

$$s \frac{dG}{ds} = \gamma(g(s)) G \left( \frac{s}{\mu^2}, g_1(s) \right) \quad (111)$$

Dimostriamo che questo è corretto in modo più

rigoroso: poniamo

$$G \left( \frac{s}{\mu^2}, g_1 \right) = \bar{G} \left( \frac{s}{\mu^2}, g_0(s, g_{\mu^2}) \right) \quad (112)$$

La  $\bar{G}$  soddisfa

$$s \frac{d\bar{G}}{ds} = s \frac{\partial \bar{G}}{\partial s} + s \frac{d}{ds} g \frac{\partial \bar{G}}{\partial g} \quad (113)$$

ma ricordiamo che la  $g$  soddisfa l'eq. di  $\beta G$

$$s \frac{d}{ds} g = \beta(g) \frac{\partial g}{\partial s} \quad (114)$$

e dunque

$$\begin{aligned} s \frac{\partial}{\partial s} G \left( \frac{s}{\mu^2}, g_1 \right) &= s \frac{\partial \bar{G}}{\partial s} + \beta(g(s)) \frac{\partial \bar{G}}{\partial g(s)} \\ &= \beta(g) \frac{\partial \bar{G}}{\partial g_{\mu^2}} + \gamma(g) G \end{aligned} \quad (115)$$

Potendo  $\mu^2 = 5$  nella seconda equazione si ha

$$s \frac{\partial}{\partial s} \bar{G} = \gamma(g(s)) \bar{G} \quad (116)$$

che è quello che si voleva dimostrare.

La soluzione dell'eq. (116) è immediata

$$\bar{G}(s, g_{1,2}) = \bar{G}(g_{1,2}) \exp \int_{g_{1,2}}^s \frac{dx^2}{x^2} \gamma(g(x^2)) \quad (117)$$

dove notiamo che la condizione iniziale è imposta a  $s = g_{1,2}$  dove  $g(s) = g_{1,2}$ .

Determiniamo ora la soluzione nel caso di funzione  $\beta$  quadratica, prendendo cioè  $\beta$  di  $\gamma$  al primo ordine.

Abbiamo

$$\exp \int_{g_{1,2}}^s \frac{dx^2}{x^2} \gamma(g(x^2)) = \exp \int_{g_{1,2}}^{g(s)} \frac{dg}{\beta(g)} \gamma(g)$$

$$= \exp \int_{g_{1,2}}^{g(s)} \frac{dg}{\beta_0 g^2} \gamma^{(0)}(g) = \exp - \frac{\gamma^0}{\beta_0} \ln \frac{g(s)}{g_{1,2}}$$

$$= \left( \frac{g_{1,2}}{g(s)} \right)^{\gamma^0/\beta_0} = \left( 1 + \beta_0 g_{1,2} \ln \frac{g}{g_{1,2}} \right)^{\gamma^0/\beta_0} \quad (118)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la forma esplicita di  $g(s)$  in funzione di  $g_{1,2}$ .

Facciamo ora <sup>quattro</sup> tre osservazioni:

1) Sviluppando l'espressione vediamo che al primo ordine  $\gamma^{(0)}$  non è altro che il coefficiente della dipendenza logaritmica al primo ordine non lineare, infatti

$$\left(1 + \beta_0 g_{1,2} \ln \frac{s}{\mu^2}\right)^{\gamma^{(0)}/\beta_0} = 1 + \gamma^{(0)} g_{1,2} \ln \frac{s}{\mu^2} + O(g_{1,2}^2) \quad (119)$$

2) I termini successivi della serie sono LL

3) Termini di ordine superiore in  $\gamma^{(0)}$  e  $\beta$  possono contribuire NLL ... infatti

$$\frac{\gamma^{(0)} g + \gamma^{(1)} g^2}{-\beta_0 g^2 + \beta_1 g^3} = \frac{(\gamma^{(0)} g + \gamma^{(1)} g^2)}{-\beta_0 g^2} \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} g\right)$$

$$= -\frac{\gamma^{(0)}}{\beta_0} \frac{1}{g} \left(1 + \left(\frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(0)}} + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right) g + \dots\right)$$

$$e \int_{\mu^2}^s \frac{d\lambda}{\lambda^2} \frac{g}{\lambda} = g(s) - g(\mu^2) \quad (120)$$

4) Essendo  $U$ , ossia ordine  $g^{(0)}$ , la dipendenza dalla scala  $\log$  e' della stessa ordine del contributo ad albero alla condizione iniziale, ossia avendo

$$\bar{G}(1, g(s)) = \bar{G}^{(0)} + \bar{G}^{(1)} g(s) + \dots \quad (121)$$

e' dello stesso ordine di  $\bar{G}^{(0)}$ .

Averdo cosi' ricavato la dip. dalla scala per fermi a  $n$  punti, osservero che possiamo piu' in generale definire la dimensione canonica di un operatore

$O$  (ad esempio  $\bar{\psi}\psi$  in una teoria di fermi) a partire da

$$O^{(0)} = \geq 0 \quad (122)$$

dove  $O^{(0)}$  e' l'op. bare.

~~Essendo~~ L'eq. di GR per gli el. di matrice di  $O$  sono

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu} \langle O \rangle = -\delta_0 \langle O \rangle \quad (123)$$

avendo definito come prima

$$\mu^2 \frac{d \ln Z}{d\mu^2} = \delta_0 \quad (124)$$

Notiamo che ovviamente le dimensioni canoniche sono additive (come le dimensioni anomiche!), visto che sono definite come derivate logaritmiche del  $\log$ .

Quindi, ad esempio

$$\mu \frac{d}{d\mu} \langle O_{\alpha_i} \dots \alpha_n \rangle = -(\delta_0 + n\gamma_\varphi) \langle O_{\alpha_i} \dots \alpha_n \rangle \quad (125)$$

Osserviamo infine che la dimensione anoma di una corrente conservata è nulla. Questo è fisicamente intuitivo, in quanto ~~è associata a una carica conservata~~ è associata a una carica conservata e osservabile, e dunque è risolvibile e non può dipendere dalla scala, come la  $\sigma^1$  da noi studiata in precedenza.

Il risultato si dimostra notando che l'identità di Ward

$$\partial_\mu \langle j^\mu \alpha_i \dots \alpha_n \rangle = \sum_i \langle \delta \alpha_i \dots \alpha_n \rangle \quad (126)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \langle j^\mu \alpha_i \dots \alpha_n \rangle &= -(\delta_j + n\gamma_\varphi) \langle j^\mu \alpha_i \dots \alpha_n \rangle \\ &= \mu \frac{d}{d\mu} \sum_i \langle \delta \alpha_i \dots \alpha_n \rangle \\ &= -n \gamma_\varphi \langle j^\mu \alpha_i \dots \alpha_n \rangle \quad (17) \end{aligned}$$

da cui necessariamente  $\delta_j = 0$

## 5. Lo sviluppo di Wilson

Una tecnica particolarmente potente se usata in congiunzione con le eq. del GR è lo sviluppo di Wilson (OPE), che permette di calcolare l'ins. di Green di operatori bilocali in termini di valori medi di op. locali. In meccanica statistica, questo consente di studiare la dip. dalla separazione di correlazioni, e quindi le transizioni di fase, e in teor. delle interazioni fondamentali questo permette di calcolare sez. d'urto usando il teor. ottico, attraverso relazioni del tipo  $\sigma \sim \langle S \rangle^2 = \frac{2}{i} \text{Im} \langle SS \rangle$ .  
L'idea di base dello sviluppo di Wilson è che valga la eq. operatoriale

$$A(x) B(y) \underset{x \rightarrow y}{\sim} \sum_i C_i(x-y) O_i(x) \quad (124)$$

dove  $O_i$  è una base completa di operatori che portano gli stessi numeri quantici del prodotto  $AB$ .

Il risultato si "dimostra" come segue:

$$G_{AB}^{(n)} = \langle T A(x) B(y) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \int D\varphi e^{iI[\varphi]} A(x) B(y) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \quad (124)$$

Ma prima  $I[\varphi] = \int_{x \in B_R} d^4x \mathcal{L} + \int_{x \notin B_R} d^4x \mathcal{L} = I_B + I_{\bar{B}} \quad (125)$

dove  $B$  è una sfera intorno a  $\frac{x+y}{2}$ , e sappiamo che

$$\left| \frac{x-y}{2} \right| \ll R \ll \left| x_i - \frac{x+y}{2} \right| \quad (126)$$

Abbiamo

$$G_{AB}^{(n)} = \int_{x \in B_R} D\varphi \int_{x \notin B_R} D\varphi A(x) B(y) e^{iI_B} e^{iI_{\bar{B}}} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \quad (127)$$

notando che il PI può essere pensato come una prodotto di integrali

ciascano in un distinto punto dello spazio-tempo

Ma ora calcoliamo il PI intero

$$G_n^{AB\bar{m}} = \int_{x \in B_n} Dq \quad A(x) B(y) e^{iI_B} \quad (128)$$

Questo è un funzionale dei campi sul bordo di  $B_n$  (così come in PI ordinario è una funzione delle coord. iniziali e finali  $q(t_i), q'(t_f)$ ). D'altra parte possiamo svilupparlo in serie di Taylor  $\varphi(x \in B)$  attorno a  $\bar{x}_c$  dove  $c$  è il centro della sfera

$$\varphi(x_B) = \varphi(\bar{x}_c) + (\bar{x}_B - \bar{x}_c) \cdot \nabla \varphi(\bar{x}_c) + \dots \quad (129)$$

Quindi un generico funzionale di  $\varphi(\bar{x}_B)$  può essere scritto come funzionale dei campi e delle loro derivate tutti valutati in  $\bar{x}_c$ , con coeff. dipendenti da  $(\bar{x}_B - \bar{x}_c)$ .

Dunque  $G_n^{AB\bar{m}}$  può essere scritto come funzionale dei campi in  $\varphi(\bar{x}_c)$  e delle loro derivate. I coefficienti non passano a dipendere da  $\bar{x}_B$ , perché su  $\bar{x}_B$  si integra (si somma) pensando alla  $\bar{x}$  del campo come un indice) e dunque possono solo dipendere da  $x - x_c$  e  $y - x_c$ . Prendendo  $x_c = \frac{x-y}{2}$  essi dipenderanno solo da  $x-y$  e dunque abbiamo

$$G_n^{AD\bar{m}} = \sum C_n \varphi(x-y) O_n[\varphi(x)] \quad (130)$$

dove gli  $O_n$  sono una base completa nello spazio dei campi

Ma dunque si ha

$$G_n^{AB} = \int_{x \in B_n} Dq \quad e^{iI_B} \quad C_n \dots \varphi_n \sum_m C_m(x-y) O_m[\varphi(x)] / 117 \quad (131)$$

Studiamo ora la dipendenza dimensionale (canonica e canonica) dell'OPE.

Abbiamo un certo prodotto nei termini di Fourier

$$\int d^4x e^{i p x} A(x) B(0) = \sum_i C_i(p) O_i \quad (132)$$

Notare che la dip. da  $p$  è tutta nei coefficienti:

$$C_i = C_i\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right) \text{ mentre } O_i = O_i(\mu^2) \quad (133)$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \sum_i C_i O_i &= \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \int d^4x A(x) B(0) e^{i p x} \\ &= -(\Gamma_A + \Gamma_B) \int d^4x A(x) B(0) e^{i p x} \end{aligned} \quad (134)$$

con  $\Gamma = D + \delta \cdot n_a$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \sum_i C_i O_i = \sum_i \left( \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} C_i - \Gamma_i C_i \right) O_i \quad (135)$$

Visto che gli  $O_i$  sono una base completa

si segue che

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} C_i = + \left( \Gamma_i - (\Gamma_A + \Gamma_B) \right) C_i \quad (136)$$

Ma visto che  $C_i = C_i\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)$  questa implica

$$p^2 \frac{d}{dp^2} \ln C_i = - \left( \Gamma_i - (\Gamma_A + \Gamma_B) \right) \quad (137)$$

ossia  $\ln C_i = -(\ln A_i + \ln B_i - \ln A - \ln B)$

Questo vuol dire che i coefficienti degli operatori di dimensione elevata sono soppressi nel limite di alta energia. Questo è importante perché vi è un numero infinito di operatori di dimensione elevata (aggiungendo corpi o derivate) mentre esiste sempre un valore minimo della dimensione: nel limite di alta energia un numero finito di operatori contribuisce.

Consideriamo dunque l'OPE per un prodotto di due operatori, e utilizzandola per calcolare l'elemento di matrice

$$\langle A B \rangle = \sum_i C_i \langle O_i \rangle \quad (138)$$

L'idea dell'OPE è che scegliendo un elemento di matrice in cui possiamo calcolare entrambi i membri determiniamo i coefficienti, che contengono la dipendenza non-banale, infatti

$$G(q^2) = \int d^4x \langle A(x) B(0) \rangle e^{iqx} = \sum_i C_i(q^2) \langle O_i \rangle \quad (139)$$

Possiamo quindi usare il risultato per calcolare il membro di sinistra in uno stato qualunque,

in termini di un numero finito di costanti  $\langle O_i \rangle$ .

Abbiamo in particolare, definendo

$$A_i = \langle O_i \rangle \quad (140)$$

$$G^{(1)}(q^2) = \sum_i C_i(q^2) A_i \quad (141)$$

$$= \sum_i (q^2)^{D_A + D_B - D} \bar{C}_i(q^2) A_i$$

dove i  $\bar{C}_i(q^2)$  sono adimensionali. Supponendo per semplicità che  $\gamma_A = \gamma_B = 0$  (osservabili fisiche) il coeff. di Wilson soddisfa la GRE

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \bar{C}_i(q^2) = \gamma_0 \bar{C}_i(q^2) \quad (142)$$

Rinormalizzando gli operatori  $O_i$  alla scala  $\mu^2$  abbiamo, con

$$D_0^{\min} = D_A + D_B - D_i^{\min}$$

$$G^{(1)}(q^2) = (q^2)^{D_0^{\min}} \sum_{i(\text{dini})} C(1, g(q^2)) \exp \int_1^{q^2} \frac{d\lambda^2}{\lambda^2} \gamma(g(\lambda^2)) A_i(\mu^2) \left( 1 + O\left(\frac{L^2}{q^2}\right) \right) \quad (143)$$

Ora notiamo che

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \frac{G^{(1)}(q^2)}{(q^2)^{D_0^{\min}}} = 0 \quad (144)$$

perché abbiamo supposto che  $\gamma_A = \gamma_B = 0$  e abbiamo

divisa la dimensione canonica degli operatori.  
 Infatti la dip. da  $\mu^2$  del coefficiente di  
 Wilson è opposta a quella degli elementi di  
 matrice. Ne segue che possiamo scegliere  $\mu^2 = Q^2$   
 ottenendo

$$G^{(n)}(q^2) = (q^2)^{D_{\text{div}}} \sum_i C_i(1, g(q^2)) A_i(q^2) \quad (145)$$

dove gli elementi di matrice sono dilatati  
 dip. dalla scala, cioè soddisferrà:

$$\frac{d}{d \ln q^2} A_i(q^2) = \gamma_i A_i(q^2) \quad (146)$$

Consideriamo ora una semplice applicazione: il  
 calcolo della ampiezza di transizione totale  $|\langle X | e^+ e^- \rangle|^2$ .  
 Possiamo in particolare normalizzare il risultato a  
 quello della QED, definendo



$$R = \frac{|\langle X | e^+ e^- \rangle|^2}{|\langle \mu^+ \mu^- | e^+ e^- \rangle|^2} \quad (147)$$

che ha il vantaggio di essere adimensionale.

Possiamo calcolare sia il numeratore che il  
 denominatore usando il teorema ottico, come

$$|\langle X | e^+ e^- \rangle|^2 = 2 \text{Im} \langle e^+ e^- | e^+ e^- \rangle \quad (148)$$

e includendo rispettivamente tagli su  $\mu$  e tagli su  $\sqrt{12}$

tutti gli stati fisici. Potremmo quindi semplicemente determinare la dipendenza completa dalla scala della funzione a due punti calcolata  $\Gamma^{(\nu)}$ , ossia della self-energia  $\Pi(q^2)$  calcolando la dimensione anomala, da ricevere contributi da diagrammi come  e , e per sciogliere la eq. del GR per  $\Gamma^{(\nu)}$ , risolvendola, e prendendo la parte immaginaria. Ma questo solleva il dubbio che per calcolare il contributo anomalo sia necessario introdurre stati legati nei loop. L'OPE evita il problema perché i pericoli di avere che la dip. dalla scala è in un coefficiente inversale che è una proprietà dell'operatore.

Calcoliamo dunque l'OPE per  $J^\mu J^\nu$  e usiamo il risultato per calcolare

$$\langle T J^\mu J^\nu \rangle = i \Pi(q^2) (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \quad (149)$$

Abbiamo

$$J^\mu(0) J^\nu(x) = C_{\mu\nu}^{\mathbb{1}} \mathbb{1} + C_{\mu\nu}^{\bar{\psi}\psi} \bar{\psi}\psi + C_{\mu\nu}^{F^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (150)$$

Ora notiamo che

$$C_{\mu\nu}^{\mathbb{1}} \sim \frac{1}{|x|^6} \quad ; \quad C_{\mu\nu}^{\bar{\psi}\psi} \sim \frac{m}{|x|^4} \quad ; \quad C_{\mu\nu}^{F^2} \sim \frac{1}{|x|^2}$$

però  $\bar{\psi}\psi$  è m necessario per im. chirale

Le dimensioni anomale dei vari operatori possono essere calcolate prendendo gli elementi di indice di entrambi i membri dell'equazione (150) in uno stato  $n$ . In particolare la dim. anomala dell'operatore  $\mathcal{A}$  che dà il contributo dominante si calcola prendendo il VEV di entrambi i membri:

$$\langle 0 | \mathcal{J}^\mu \mathcal{J}^\nu | 0 \rangle = c_{\mu\nu} \quad (151)$$

Notiamo che a priori nella teoria fortemente interagente si potrebbe avere  $\langle \mathcal{A} \rangle \neq 0$  o  $\langle P^\mu P^\nu \rangle \neq 0$ . Tuttavia calcoliamo  $c_{\mu\nu}$  nel vuoto perturbativo.

Notiamo che il calcolo è a questo punto di nuovo il calcolo della self energia, in quanto  $\langle \mathcal{A} \rangle$  dà un contributo di scorcio:

$$\langle T \mathcal{J}^\mu \mathcal{J}^\nu \rangle = \langle \mathcal{A} \rangle \neq 0 \quad (152)$$

Stiamo quindi calcolando una dim. anomala di vuoto: in effetti la self. energia viene adde. chiamata plurivariale del vuoto.

Ovviamente il calcolo è quello di prima, e ci dice  $\frac{-\delta}{\delta \ln}$

$$\bar{C} \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) = \bar{C} (1, \alpha(Q^2)) \left( 1 + \beta_0 \alpha_p \frac{2Q^2}{\mu^2} \right)$$

dove  $\beta_0$  è la dim. anomala ottenuta da

$$\beta_0 = -m^2 \frac{d}{dm^2} \quad \gamma_3 = -\frac{\alpha}{3\pi} Q^2 \quad (153)$$

per un loop di carica  $Q_e$

Notare che  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  la dim. euclidea del vuoto con singole  
 di bosoni alla quale stiamo calcolando il contributo proveniente  
 dai campi di QCD.

Abbiamo in particolare

$$C(\frac{d^2}{s^2}) = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} Q^2 \ln \frac{q^2}{\mu^2} \quad (154)$$

Estraiamo la parte immaginaria prendendo  $q^2 < 0$

da cui 
$$\text{Im } C = \frac{\alpha}{\pi} Q^2 \quad (155)$$

Questo ovviamente è lo stesso risultato che avevamo  
 trovato facendo il calcolo perturbativo della self-energia,  
 ma l'argomento basato sull'OPE ci permette di calcolare  
 de l'argomento vale malgrado non usi i gradi di libertà  
 fisici della teoria.

Notiamo infine che il GR ci permette di calcolare il log  
 nella regione fisica in cui  $q^2 > 0$  e continuando analiticamente  
 nella regione in cui  $q^2 < 0$  dove possiamo usare il teor.  
 ottico e dove vale lo sviluppo di Wilson.

# VI L'anomalia chirale

## Da 6.1 Il decadimento del $\pi$ in due fotoni

È necessario di introdurre una scala nel processo di rinormalizzazione rompe l'altra simmetria legata all'assenza di fermi di massa: la simmetria chirale dei fermioni. In effetti questa rottura quantistica di simmetria e quella legata all'invarianza di scala in teorie supersimmetriche esprimono la non cancellazione di correnti ( $J_D^A$  e  $J_A^V$ ) legate fra loro da una trasformazione di supersimmetria. Questo si può dimostrare mostrando che in entrambi i casi la rottura quantistica della simmetria è legata alla non-invarianza della misura di integrazione funzionale nella teoria rinormalizzata.

Lo si come nel caso dell'invarianza per dilatazioni, dimostrando la rottura della simmetria con il calcolo diretto. L'esempio storicamente primario è nel modello  $\sigma$  accoppiato alla QED:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - eA)\psi + g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi) + V(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (1)$$

motivo della scelta il segno di  $g$  opposto che nel capitolo sul modello  $\sigma$ , per coerenza con le convenzioni di Sackler.  
Per semplicità consideriamo il caso di un solo  $\pi$

Sicché la simmetria  $e^{-U(1) \times U_A(1)}$  consiste nella trasformazione

$$\psi \rightarrow \psi'_R = e^{i\theta_R \frac{1+\gamma_5}{2}} \psi_R \quad (2)$$

$$(\psi + i\pi) \rightarrow e^{i\theta_L} (\psi + i\pi) e^{-i\theta_R} \quad (3)$$

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad ; \quad j^\mu_A = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi + 2(\pi \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \pi) \quad (4)$$

La conservazione della corrente assiale dice che

$$\partial_\mu j^\mu_5 = 0 \quad (5)$$

Questo in particolare implica che

$$\partial_\mu \langle 0 | j^\mu_5 | \gamma\gamma \rangle = -i p_\mu f_\pi \langle \pi | \gamma\gamma \rangle \quad (6)$$

condiziona

$$p^2 f_\pi \langle \pi | \gamma\gamma \rangle = 0 \quad (7)$$

Questo implica che, anche a priori il  $\pi$  possa venire in polo in  $\frac{1}{p^2}$  essendo in Gell-Mann, la sua ampiezza di decadimento in  $\gamma\gamma$  si annulla. Storicamente questo è appreso essere un problema fenomenologico in quanto  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  è il modo di decadimento dominante del  $\pi$  neutro, e dunque mentre tutte le altre predizioni del modello  $\sigma$  sembrano essere corrette se si suppone che esso sia una buona teoria di bassa energia della QCD questa fallisce. Originale l'applicazione alla QCD realistica richiede di considerare il caso  $SU(2)$ .

La fenomenologia redistica richiede inoltre di includere il fatto che  $m_\pi$  non è esattamente uguale a zero, ma anche in tal caso si trova

$$\langle \pi | \delta \delta \rangle \sim \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} \quad (8)$$

che porta ad un risultato troppo piccolo per un fattore albedo 100 per il tasso di decadimento.

Facciamo quindi il calcolo esplicito nel modello 5: vediamo che l'id di Ward fallisce.

Specificamente, calcoliamo

$$T^{\mu\alpha\beta} = \langle T J_5^\mu J^\alpha J^\beta \rangle \quad (9)$$

l'id di Ward è

$$\partial_\mu T^{\mu\alpha\beta} = 0 \quad (10)$$

perché  $\delta^5 J^\alpha = 0$ .

Vi sono due contributi ad albero, ciascuno con due diag. di Feynman:

$$T^{\mu\alpha\beta} = T_1^{\mu\alpha\beta} + T_2^{\mu\alpha\beta} \quad (11)$$

$T_1^{\mu\alpha\beta}$ :

$\frac{K^\mu}{k^2}$  e sequo:  $i p_\mu \langle \pi | \delta \delta \rangle = i p_\mu \frac{f_\pi}{k^2} \langle \pi | \delta \delta \rangle$  (sequo opposto al capitolo sul nodo)

$$T^{\mu\alpha\beta} = i g e^2 \int \frac{d^4 e}{(2\pi)^4} T_2 \delta_5^\mu \frac{1}{\not{p} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{q} - m} \gamma^\beta \frac{1}{\not{k} - m} \quad (13)$$

~~$$T^{\alpha\beta} = 2\pi i m g e^2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\gamma q_\delta \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell+p)^2 - m^2} \frac{1}{\ell^2 - m^2} \frac{1}{(\ell-q)^2 - m^2} \quad (14)$$~~

L'integrale sembra divergere l'incute, ma in realtà solo la traccia con 4 molit'  $\gamma$  scompare, quindi uno dei fattori di impulso è portato da una mance, e si ha

$$T^{\alpha\beta} = 2\pi i m g e^2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\gamma q_\delta \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell+p)^2 - m^2} \frac{1}{\ell^2 - m^2} \frac{1}{(\ell-q)^2 - m^2} \quad (15)$$

L'integrale di loop si calcola con due parametri di Feynman, con il risultato lineare

$$T^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} p_\gamma q_\delta T(k^2) \quad (16)$$

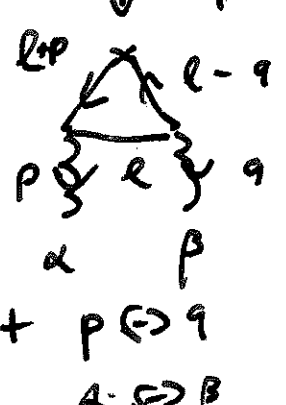
$$T(k^2) = \frac{m g e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{m^2 - k^2 xy} \quad (17)$$

Nota che  $T(0) \neq 0$ .

Affinchè valga l'id di Ward (10) deve quindi esserci una cancellazione tra questa contributa e l'altro contributo:

$$k_\mu T_1^{\mu\alpha\beta} = -2\pi i T^{\alpha\beta} = -k_\mu T_2^{\mu\alpha\beta} \quad (18)$$

dove

$$T_2^{\mu\alpha\beta} = \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} T_2^{\mu\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\ell + \not{p} - m} \gamma^\alpha \frac{1}{\ell - \not{m}} \gamma^\beta$$


$$+ \frac{1}{\ell - \not{p} - m} \quad (19)$$

Notiamo che la  $T_1$  e la  $T_2$  devono anche separatamente soddisfare l'id di Ward associate all'invarianza  $U(1)$  di gauge

$$p_\alpha T_1^{\mu\alpha\beta} = q_\beta T_2^{\mu\alpha\beta} = 0 \quad (20)$$

È evidente dalla eq. (16) che la  $T_1$  la soddisfa.

Il calcolo esplicito mostrato della  $T_2$  è ambiguo, nel senso che è l'itc bundle l'integranda sia linearmente divergente, ma il risultato dipende dalla scelta di variabile di loop.

La situazione è simile al calcolo di un integrale della

forma

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x+a) - f(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ f'(x)a + \frac{a^2}{2} f''(x) + \dots \right] \quad (21) \\ &= a [f(\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2} [f'(\infty) - f'(-\infty)] + \dots \end{aligned}$$

Se  $f(x)$  diverge linearmente  $f'(\infty) \neq 0$  e dunque per essere in teorie di superficie nonnulla.

In 4 dimensioni lo stesso vale per un integrale della forma

$$\begin{aligned} \Delta^\mu(a) &= \int d^4\ell \frac{\ell^\mu + a^\mu}{[(\ell+a)^2 - m^2]^2} - \frac{\ell^\mu}{\ell^2 - m^2} \quad (22) \\ &= -i 2\pi^2 a^\mu \end{aligned}$$

Definiamo quindi  $T_2(p, q; a)$  come l'integrale Eq. (19) ma con  $l \rightarrow l+a$ . Il calcolo esplicito porta a

$$k_\mu T_2^{\mu\alpha\beta} = 2k_\mu T^{\alpha\beta} + a \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} p_\rho q_\sigma \quad (23)$$

D'altra parte, troviamo anche

$$p_\alpha T_2^{\mu\alpha\beta} = \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} p_\rho q_\sigma \left(1 + \frac{a}{2}\right) \quad (24)$$

che ci obbliga a scegliere  $a = -2$ .

Troviamo quindi, usando la eq. (23) nella (18)

con  $a = -2$

$$k_\mu \left( T_1^{\mu\alpha\beta} + T_2^{\mu\alpha\beta} \right) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} p_\rho q_\sigma \quad (25)$$

Questo equivale a modificare la legge di conservazione della corrente assiale come

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{e^2}{8\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (26)$$

Questo risultato può anche essere dimostrato direttamente, definendo l'operatore  $j_5^\mu$  in modo appropriato come

$$j_5^\mu(x) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}(x + \frac{\varepsilon}{2}) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x - \frac{\varepsilon}{2}) + \text{spice} \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} A^\alpha(\gamma) d\gamma \quad (27)$$

Notiamo infine che se l'integrale brevemente divergente viene calcolato usando un regolatore che rispetta l'invarianza di gauge (come la reg. dimensionale),  $a = -2$  emerge automaticamente. 130

## 6.2 Il problema $U(1)$ in QCD

Si dimostra che una  $U(1)$  generata da una corrente assiale nonabeliana è affetta da una anomalia

$$D_\mu j_5^\mu = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \lambda^a F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu} \quad (28)$$

è la corrente sigoletto

$$j_5^\mu = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu} \quad (29)$$

La presenza di questa anomalia determina la struttura di vuoto delle teorie di gauge non-abeliane e della QCD in particolare.

Anche in questo caso, il problema è verso  
da un problema fenomenologico. La QCD a bassa  
energia ha una simmetria  $SU_V(2) \times SU_A(2) \times U_V(1) \times U_A(1)$   
dovuta al fatto che i quark leggeri sono massless.  
La simmetria  $U_V(1) \times SU_V(2)$  è realizzata alla Wigner:  
conservazione del numero barionico e dell'isospin. La  
simmetria  $SU_A(2)$  è realizzata alla Goldstone: i  $\pi$   
sono i bosoni di Goldstone. Ma la  $U_A(1)$  non è realizzata  
alla Wigner (implicherebbe che i barioni massivi partner  
di partner opposti e ugual massa) e non alla Goldstone

perché la  $\eta$  (misura sigaretto) ha massa troppo elevata (vedi un buon esatto di Weinberg)

Una prima osservazione è che la conservazione della corrente è violata dall'anomalia. Tuttavia notiamo che

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^\mu &= \frac{g^2}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} * F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{g^2}{8\pi^2} \partial_\mu \Omega_\mu \end{aligned} \quad (30)$$

con

$$\Omega_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{2} \text{tr} \left( A^\nu \partial^\alpha A^\beta + A^\nu A^\alpha A^\beta \right) \quad (31)$$

Dunque la corrente

$$\tilde{j}_5^\mu = j_5^\mu - \frac{g^2}{16\pi^2} \Omega^\mu \quad (32)$$

e la carica

$$\tilde{Q}_5 = \int d^3x \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi - \frac{g^2}{16\pi^2} \Omega^0 \right) \quad (33)$$

sono conservate.

Notiamo però che la carica

$$Q_\Omega = \int d^3x \left( -\frac{g^2}{16\pi^2} \right) \Omega^0 \quad (34)$$

non è invariante di gauge sotto una classe di

trasformazioni. Questo non è incompatibile con  
 l'inv. di gauge di  $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*$  perché scegliendo lo  
 spazio come  $I \times S^3$  si ha

$$\int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* = \int_{\Sigma} Q(\infty) - \int_{\Sigma} Q(-\infty) \quad (35)$$

dove

$$Q_{\Sigma}(t) = \int_{S^3} d^3x \Omega(\bar{x}, t) \quad (36)$$

Dimostriamo questo esplicitamente considerando un  
 campo di pura gauge (trasf. di gauge di  $A=0$ )

$$A_{\mu} = g^{-1} \partial_{\mu} g \quad (37)$$

Per questo campo

$$\Omega(\bar{x}, t) = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{ij\ell} \left( g^{-1} \partial_i g \cdot g^{-1} \partial_j g \cdot g^{-1} \partial_{\ell} g \right) \quad (38)$$

Ora osserviamo che  $g$  è una mappa dallo spaziotempo  
 alla rotazione del gruppo di gauge. Scegliendo la gauge  $A^0=0$   
 $g = g(\bar{x}) : S^3 \rightarrow SU(N)$ . Si dimostra che  $SU(N)$  è  
 topologicamente equiv. a  $SU(2) \sim S^3$  (quaternioni).

Dunque  $g(x) : S^3 \rightarrow S^3$ . Le mappe  $S^3 \rightarrow S^3$

cedono in classi di equivalenza:  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$  e

$$\int d^3x Q_{\Sigma} [g] = n \in \mathbb{Z} \quad (39)$$

Ma la proprietà di gruppo implica che

$$g_n g_m = g_{n+m} \quad (40)$$

Dunque qualunque corpo de a  $t = \pm \infty$  si riduce a una pua gauge e non rivaiate sotto trasf. di gauge non-locali.

Notiamo che esistono configurazioni di corpo che si riducono a pua gauge di dati diversi a  $t = \pm \infty$ . Tali configurazioni di corpo hanno azione intera, e sono caratterizzate da

$$F^{\mu\nu} = \star F^{\mu\nu} \quad (41)$$

(istantanei). Ne segue che esse, come visto, sono sol. delle eq. di campo del vuoto e dunque vicini della azione. Esse soddisfano

$$\begin{aligned} I &= \int d^4x \, t F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \int d^4x \, t \star F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \, \partial_\mu \Omega^\mu = \int \Omega(\infty) - \Omega(-\infty) \\ &= n \end{aligned} \quad (42)$$

Torniamo ora al problema U(1). Abbiamo mostrato che la carica  $\tilde{Q}_5$  è conservata, dunque commuta con l'hamiltoniana

$$[\tilde{Q}_5, \mathcal{H}] = 0 \quad (43)$$

ma anche che essa non è invariante sotto trasform. di gauge topologicamente non banali. Pertanto essa non commuta con l'op.  $G_m$  che realizza una trasform. di gauge non-triviale sullo spazio di fasi di campo, il quale però necessariamente commuta con l'Hamiltoniana, che è inv. di gauge:

$$[G_m, \tilde{Q}_5] \neq 0 \quad (44)$$

$$[G_m, H] = 0 \quad (45)$$

Notiamo che in effetti

~~$$[G_m, \tilde{Q}_5] G_m^{-1} = G_m \tilde{Q}_5 G_m^{-1} - \tilde{Q}_5$$~~

$$[G_m, \tilde{Q}_5] G_m^{-1} = G_m \tilde{Q}_5 G_m^{-1} - \tilde{Q}_5$$

$$= n \mathbb{1}$$

da cui

$$[G_m, \tilde{Q}_5] = n G_m \quad (46)$$

Questa è la situazione del teor. di degenerazione. Ne deduciamo che lo stato fondamentale è degenerato. Ora noi vogliamo che lo stato fond. sia invariante di gauge.

I vni di degenerazione sono

$$|n\rangle = G_m |0\rangle$$

$$(47)$$

135

Il vettore in. di gauge è

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta} |n\rangle \quad (48)$$

infatti esso soddisfa

$$\sum_n |\theta\rangle = e^{in\theta} |\theta\rangle \quad (49)$$

e dunque sotto transf. di gauge cambia per una fase inosservabile.