ESAME SCRITTO DI FISICA TEORICA I

2 ore e 30 minuti; non sono consentiti libri o appunti

18 settembre 2025

Considerare una teoria con un tripletto di campi scalari reali ϕ^i , $i = 1, 2, 3$, di ugual massa M , e un doppietto di campi di Dirac ψ_a , $a = 1, 2$ di ugual massa m , avente lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - M^2 \phi_i^2) + \sum_{a=1}^2 \bar{\psi}_a (i\not{\partial} - m) \psi_a + \mathcal{L}_i, \quad (1)$$

con

$$\mathcal{L}_i = -g \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{a,b=1}^2 \bar{\psi}_a \sigma_{ab}^i \psi_b \right) \phi_i, \quad (2)$$

dove σ_{ab}^i è la i -esima matrice di Pauli di componenti ab .

1. Determinare il tensore energia-impulso e la hamiltoniana per questa teoria.
2. Riscrivere la lagrangiana Eq. (1) in termini del campo scalare reale ϕ_3 e del campo scalare complesso

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2) \quad (3)$$

e quindi riscriverla in termini del campo scalare reale ϕ_3 e della coppia di campi scalari complessi $\phi^\pm$, con ϕ^+ dato dalla Eq. (3) e

$$\phi^- = (\phi^+)^*. \quad (4)$$

3. Determinare le regole di Feynman per la teoria considerando i campi ϕ^+ , ϕ^- e ϕ^3 come campi fondamentali.
4. Scrivere i diagrammi di Feynman ad albero per i due processi $f_1 f_2 \rightarrow f_1 f_2$ e $f_1 \bar{f}_2 \rightarrow f_1 \bar{f}_2$ dove f_i e $\bar{f}_i$ indicano rispettivamente il fermione e l'antifermione associati al campo ψ_i .
5. Determinare l'ampiezza non polarizzata per il processo $f_1(p_1) f_2(p_2) \rightarrow f_1(k_1) f_2(k_2)$ al primo ordine in teoria delle perturbazioni, esprimendo il risultato in termini di prodotti scalari fra i quadri-impulsi p_i e k_i . Trascurare la massa m dei fermioni, ma non la massa M dei campi scalari.
6. Esprimere il risultato trovato al punto precedenti in termini di invarianti di Mandelstam.
7. Determinare la ampiezza trovata al punto precedente nel limite in cui la massa del campo scalare M è molto più grande degli invarianti di Mandelstam.
8. Determinare tutti i diagrammi di Feynman che contribuiscono alla correzione a un loop a tutte le funzioni a due punti della teoria data e determinare il loro grado di divergenza.
9. Determinare le simmetrie interne della teoria, e le correnti di Noether classiche associate ad esse.
Suggerimento: considerare la trasformazione dei campi sia fermionici che scalari, e ricordare le proprietà delle matrici di Pauli.