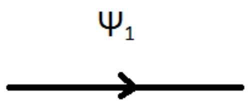
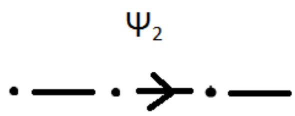
Esame Scritto di Fisica Teorica 1
Traccia di Soluzione

25 Gennaio 2016

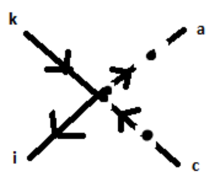
1. Le regole di Feynman sono



$$\frac{i\left(\not p + m_1\right)}{p^2 - m_1^2 + i\epsilon} \tag{1}$$



$$\frac{i\left(\not p + m_2\right)}{p^2 - m_2^2 + i\epsilon} \tag{2}$$



$$-\,iG\left(\gamma^\mu\right)_{cj}\left(1-\gamma^5\right)_{ji}\left(\gamma_\mu\right)_{ab}\left(1-\gamma^5\right)_{bk}. \tag{3}$$

   Nell'ultima regola gli indici si riferiscono agli spinori di Dirac.

2. L'elemento di matrice al primo ordine per il processo

$$f_1\left(p_1\right) + f_2\left(p_2\right) \to f_1\left(p_3\right) + f_2\left(p_4\right) \tag{4}$$

   è dato dal vertice a quattro fermioni:

$$\mathcal{M} = -iG\left[\bar{u}_1\left(p_4\right)\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)u_2\left(p_1\right)\bar{u}_1\left(p_3\right)\gamma_\mu\left(1-\gamma^5\right)u_2\left(p_2\right)\right]. \tag{5}$$

   Ora calcoliamo il modulo quadro sommato e mediato sulle polarizzazioni:

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = \frac{G^2}{4}&\mathrm{Tr}\left(\left(\not p_1 + m_1\right)\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)\left(\not p_4 + m_2\right)\gamma^\nu\left(1-\gamma^5\right)\right)\\ &\mathrm{Tr}\left(\left(\not p_2 + m_2\right)\gamma_\mu\left(1-\gamma^5\right)\left(\not p_3 + m_1\right)\gamma_\nu\left(1-\gamma^5\right)\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Prendendo il limite $m_2 \to 0$ le tracce si semplificano molto. Si noti che il risultato in questo limite coincide con quello generale in quanto tutti i termini proporzionali a m_2 si annullano.

Nel limite $m_2 \to 0$ il modulo quadro diventa:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = {} & \frac{G^2}{4} \mathrm{Tr}\left(\left(\not{p}_1 + m_1\right) \gamma^\mu \left(1-\gamma^5\right) \not{p}_4 \gamma^\nu \left(1-\gamma^5\right) \right) \\
& \mathrm{Tr}\left(\not{p}_2 \gamma_\mu \left(1-\gamma^5\right) \left(\not{p}_3 + m_1\right) \gamma_\nu \left(1-\gamma^5\right) \right) \qquad (7) \\
= {} & \frac{G^2}{4} \mathrm{Tr}\left(\not{p}_1 \gamma^\mu \left(1-\gamma^5\right) \not{p}_4 \gamma^\nu \left(1-\gamma^5\right) \right) \\
& \mathrm{Tr}\left(\not{p}_2 \gamma_\mu \left(1-\gamma^5\right) \not{p}_3 \gamma_\nu \left(1-\gamma^5\right) \right) \qquad (8) \\
= {} & 64 G^2 \left(p_1 \cdot p_2\right) \left(p_3 \cdot p_4\right), \qquad (9)
\end{aligned}$$

(il calcolo della traccia è dato sotto).

In funzione degli invarianti di Mandelstam, quando $m_2 = 0$ si ha

$$\left(p_1 \cdot p_2\right) = \left(p_3 \cdot p_4\right) = \frac{1}{2}\left(s - m_1^2\right) \tag{10}$$

e quindi il modulo quadro può essere espresso nel seguente modo

$$|\mathcal{M}|^2 = 16 G^2 \left(s - m_1^2\right)^2 . \tag{11}$$

Per completezza, diamo separatamente il calcolo della traccia (attenzione che gli impulsi sono stati ri-nominati):

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \left(1-\gamma^5\right) \not{p}_1 \gamma^\nu \left(1-\gamma^5 \not{p}_2\right) \right) \mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu \left(1-\gamma^5\right) \not{p}_3 \gamma_\nu \left(1-\gamma^5\right) \not{p}_4 \right) \\
& = 2\,\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \left(1+\gamma^5\right) \right) 2\,\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu \not{p}_4 \left(1+\gamma^5\right) \right) \\
& = 2\, \left(p_1\right)_\rho \left(p_2\right)_\sigma \left[\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \right) + \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^5 \right) \right] \\
& \quad 2\, \left(p_3\right)^\alpha \left(p_4\right)^\beta \left[\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \right) + \mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma^5 \right) \right] .
\end{aligned}$$

Ora usiamo i risultati noti per la traccia di quattro matrici gamma con e senza γ^5 e svolgiamo i prodotti scalari:

$$
\begin{aligned}
& 2\,(p_1)_\rho\,(p_2)_\sigma \left[\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma\right) + \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^5\right)\right] \\
& 2\,(p_3)^\alpha\,(p_4)^\beta \left[\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right) + \mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma^5\right)\right] \\
= {} & 2\left[4\left(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1\cdot p_2)\,g^{\mu\nu}\right) - 4i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{1\,\rho}\,p_{2\,\sigma}\right] \\
& 2\left[4\left(p_{3\,\mu}p_{4\,\nu} + p_{3\,\nu}p_{4\,\mu} - (p_3\cdot p_4)\,g_{\mu\nu}\right) - 4i\epsilon_{\mu\alpha\nu\beta}\,p_3^\alpha p_4^\beta\right] \\
= {} & 64\left[2\,(p_1\cdot p_3)\,(p_2\cdot p_4) + 2\,(p_1\cdot p_4)\,(p_2\cdot p_3) - \left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\right)p_{1\,\rho}p_{2\,\sigma}\,p_3^\alpha p_4^\beta\right] \\
= {} & 64\left[2\,(p_1\cdot p_3)\,(p_2\cdot p_4) + 2\,(p_1\cdot p_4)\,(p_2\cdot p_3) - \left(-2\left(g_\alpha^\rho g_\beta^\sigma - g_\beta^\rho g_\alpha^\sigma\right)\right)p_{1\,\rho}p_{2\,\sigma}\,p_3^\alpha p_4^\beta\right] \\
= {} & 128\left[(p_1\cdot p_3)\,(p_2\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)\,(p_2\cdot p_3) + (p_1\cdot p_3)\,(p_2\cdot p_4) - (p_1\cdot p_4)\,(p_2\cdot p_3)\right] \\
= {} & 256\,(p_1\cdot p_3)\,(p_2\cdot p_4)
\end{aligned}
$$

dove per arrivare al risultato finale abbiamo usato il seguente risultato valido per il prodotto di due tensori di Levi-Civita:

$$
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -2\left(g_\alpha^\rho g_\beta^\sigma - g_\beta^\rho g_\alpha^\sigma\right). \tag{12}
$$

3. Nel sistema di riferimento in cui f_1 iniziale è a riposo, utilizzando la cinematica indicata, possiamo esprimere i quattro quadrimpulsi delle particelle nel modo seguente:

$$
p_1 = (m_1, 0, 0, 0) \tag{13}
$$

$$
p_2 = (E_2, 0, 0, E_2) \tag{14}
$$

$$
p_3 = (yE_2, p_3\sin\theta, 0, p_3\cos\theta) \tag{15}
$$

$$
p_4 = (p_4, p_4\sin\phi, 0, p_4\cos\phi) \tag{16}
$$

con il modulo di $|\vec{p_3}| = p_3$ esprimibile in funzione di y e E_2 come $p_3 = \sqrt{y^2E_2^2 - m_1^2}$.

Passiamo ora allo spazio delle fasi. Esso è dato da

$$
df^{(2)} = \frac{d^3\vec{p}_3}{(2yE_2)\,(2\pi)^3}\frac{d^3\vec{p}_4}{(2p_4)\,(2\pi)^3}\,(2\pi)^4\,\delta\left(m_1 + E_2\,(1-y) - p_4\right)\delta^{(3)}\left(\vec{p_2} - \vec{p_3} - \vec{p_4}\right). \tag{17}
$$

Ora utilizziamo la delta sugli impulsi per eliminare l'integrazione su $\vec{p}_4$ fissando il valore del modulo a

$$
|\vec{p_4}| = p_4 = |\vec{p_2} - \vec{p_3}| = \sqrt{E_2^2 + p_3^2 - 2E_2p_3\cos\theta}. \tag{18}
$$

Lo spazio delle fasi può quindi essere espresso come:

$$
\begin{aligned}
df^{(2)} = {} & \frac{E_2\sqrt{y^2E_2^2 - m_1^2}\,dy\,d\cos\theta\,d\phi}{p_4}\frac{1}{16\pi^2} \\
& \delta\left(m_1 + E_2\,(1-y) - \sqrt{E_2^2\,(1+y^2) - m_1^2 - 2E_2\sqrt{y^2E_2^2 - m_1^2}\cos\theta}\right) = \frac{dy}{8\pi}
\end{aligned} \tag{19}
$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato l'ultima delta per eseguire l'integrazione sul $\cos\theta$, mentre l'integrazione in ϕ porta un fattore 2π.

Per ottenere la sezione d'urto differenziale nella variabile y non resta che calcolare s e il fattore di flusso nella nostra cinematica. Abbiamo i seguenti risultati:

$$
s = m_1^2 + 2m_1E_2 \tag{20}
$$

$$
\Phi = 4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2} = 4m_1E_2. \tag{21}
$$

Mettendo tutto insieme troviamo il seguente risultato per la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{4m_1 E_2} 16 G^2 4 m_1^2 E_2^2 \frac{1}{8\pi} = \frac{2G^2 m_1 E_2}{\pi} \tag{22}$$

Per completezza, notiamo che l'angolo polare è dato da

$$\cos\theta = \frac{E_2^2\left(1+y^2\right) - m_1^2 - \left(m_1 + E_2\left(1-y\right)\right)^2}{2E_2\sqrt{y^2 E_2^2 - m_1^2}}. \tag{23}$$

Osserviamo inoltre che la variabile y ha un dominio di variazione limitato dalla richiesta che la delta nella Eq. (19) non si annulli, e quindi che il coseno Eq. (23) sia compreso tra -1 e 1. Introducendo il rapporto adimensionale $\eta = \frac{m_1}{E_2}$ questa condizione diventa

$$-1 < \frac{\left(1+y^2\right) - \eta^2 - \left(\eta + 1 - y\right)^2}{2\sqrt{y^2 - \eta^2}} < 1 \tag{24}$$

che porta ai seguenti limiti per y

$$\eta < y < \frac{1 + \eta + \frac{1}{2}\eta^2}{1 + \frac{1}{2}\eta}. \tag{25}$$

4. La sezione d'urto differenziale è isotropa nella variabile y. Questo è dovuto al fatto che le particelle entranti hanno la stessa chiralità, e quindi, essendo entrambe particelle (e non antiparticelle) la stessa elicità. Ma poiché hanno impulsi opposti, si trovano in uno stato di spin totale $s_z = 0$. Questo può corrispondere solo ad uno stato di spin totale $s = 0$ perché nel limite di alta energia $s_z = \pm s$ per qualunque vaolre dello spin. Lo stesso argomento vale per le particelle uscenti. Pertanto, sia lo stato iniziale che quello finale hanno momento angolare totale nullo e quindi l'ampiezza è isotropa.

   Gli estremi di variazione per y nel limite di alta energia possono essere ottenuti prendedno il limite $\eta \to 0$ dell'Eq. (25); si ottiene

$$0 < y < 1. \tag{26}$$

5. Il termine di interazione ha dimensione $[E]^6$ e quindi la costante d'accoppiamento G deve avere dimensione $[E]^{-2}$. La teoria pertanto non è rinormalizzabile.

   La corrente $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$ è un vettore ma $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2$ è uno pseudovettore. Il termine di interazione è quindi la somma di quattro termini, VV, AA, AV e VA. I due termini AV e VA (prodotto scalare di un vettore e di uno pseudovettore) sono dispari sotto parità e quindi la lagrangiana non è invariante sotto parità, che è violata dalla teoria data.

6. In funzione del doppietto Ψ la Lagrangiana può essere riscritta come

$$\begin{aligned} L &= \bar\Psi \begin{pmatrix} i\not\partial - m_1 & 0 \\ 0 & i\not\partial - m_2 \end{pmatrix} \Psi - G\bar\Psi\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Psi\bar\Psi\gamma_\mu\left(1-\gamma^5\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Psi \\ &= \bar\Psi \begin{pmatrix} i\not\partial - m_1 & 0 \\ 0 & i\not\partial - m_2 \end{pmatrix} \Psi - G\bar\Psi\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)\sigma_+\Psi\bar\Psi\gamma_\mu\left(1-\gamma^5\right)\sigma_-\Psi \qquad (27) \\ &= \bar\Psi \begin{pmatrix} i\not\partial - m_1 & 0 \\ 0 & i\not\partial - m_2 \end{pmatrix} \Psi - \frac{G}{2}\sum_{1=1}^{2}\bar\Psi\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)\sigma_i\Psi\bar\Psi\gamma_\mu\left(1-\gamma^5\right)\sigma_i\Psi \qquad (28) \end{aligned}$$

   dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la proprietà delle matrici di Pauli $\sigma_+ = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}$ e $\sigma_- = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}$.

   Le uniche simmetrie che questa lagrangiana possiede sono le trasformazioni di fase dei due campi fermionici: $\psi_1 \to \psi_1' = e^{i\theta_1}\psi_1$ e $\psi_2 \to \psi_2' = e^{i\theta_2}\psi_2$. Le corrispondenti cariche conservate sono il numero totale di fermioni di tipo 1 e di tipo 2 (separatamente conservati). La simmetria è quindi $U(1) \otimes U(1)$.

Per avere invarianza sotto generiche trasformazioni unitarie 2×2, ossia simmetria $SU(2)$ occorre inanzitutto porre uguali le due masse $m_1 = m_2$. Questo rende la teoria libera simmetrica sotto $SU(2)$. Per rendere simmetrico anche il termine di interazione occorre aggiungere un ulteriore termine di interazione, della forma

$$L_3 = -\frac{G}{2} (J_3)^{\mu} (J_3)_{\mu} . \tag{29}$$

con J_3 definito come

$$J_3^{\mu} = \bar{\Psi}\gamma_{\mu} \left(1 - \gamma^5\right) \sigma_3 \Psi. \tag{30}$$

La lagrangiana diventa così

$$L + L_3 = \bar{\Psi} \begin{pmatrix} i\partial\!\!\!/ - m_1 & 0 \\ 0 & i\partial\!\!\!/ - m_2 \end{pmatrix} \Psi - \frac{G}{2} \sum_{1=1}^{3} \bar{\Psi}\gamma^{\mu} \left(1 - \gamma^5\right) \sigma_i \Psi \bar{\Psi}\gamma_{\mu} \left(1 - \gamma^5\right) \sigma_i \Psi \tag{31}$$

che è simmetrica sotto trasformazioni $SU(2)$ del doppietto $\Psi \to \Psi' = e^{i\theta_i \sigma_i} \Psi$.