

# Esame Scritto di Fisica Teorica 1

## Traccia di Soluzione

3 luglio 2015

Si ricorda la forma della lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^2) + \bar{\psi}_1 (i\not{\partial} - m_1 + ig\phi) \psi_1 + \bar{\psi}_2 (i\not{\partial} - m_2 + ig\phi) \psi_2 \quad (1)$$

1. Le simmetrie interne sono associate alla conservazione della carica dei fermioni. Abbiamo due cariche conservate e quindi la simmetria globale è  $U(1) \times U(1)$ . Possiamo scegliere di associare la prima simmetria al primo fermione e la seconda al secondo fermione nel modo seguente:

- Simmetria  $[U(1)]_{q_1}$

$$\psi_1 \rightarrow e^{-iq_1} \psi_1 \quad (2)$$

Conservazione della carica  $q_1$ .

Corrente di Noether conservata:

$$J_1^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_1)} (-iq_1 \psi_1) = -iq_1 (i\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_1) = q_1 \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_1 \quad (3)$$

- Simmetria  $[U(1)]_{q_2}$

$$\psi_2 \rightarrow e^{-iq_2} \psi_2 \quad (4)$$

Conservazione della carica  $q_2$ .

Corrente di Noether conservata:

$$J_2^\mu = q_2 \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_2 \quad (5)$$

Un'altra possibilità è vedere la simmetria globale come prodotto di una simmetria  $[U(1)]_{q_1+q_2}$  associata alla carica totale e una simmetria  $[U(1)]_{q_1-q_2}$  associata alla carica relativa.

2. Riscriviamo la Lagrangiana (1) imponendo l'uguaglianza delle masse  $m_1 = m_2 = m$  e utilizzando il doppietto

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}; \quad (6)$$

l'espressione finale è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^2) + \bar{\Psi} \begin{pmatrix} i\not{\partial} - m + ig & 0 \\ 0 & i\not{\partial} - m + ig \end{pmatrix} \Psi. \quad (7)$$

Ora applichiamo una generica trasformazione del tipo

$$\Psi \rightarrow U\Psi \quad (8)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}U^\dagger \quad (9)$$

e riscriviamo quindi la Lagrangiana come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^2) + \bar{\Psi} U^\dagger \begin{pmatrix} i\cancel{\partial} - m + ig & 0 \\ 0 & i\cancel{\partial} - m + ig \end{pmatrix} U \Psi, \quad (10)$$

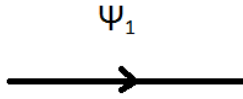
$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^2) + \bar{\Psi} (i\cancel{\partial} - m + ig) U^\dagger U \Psi \quad (11)$$

da cui segue che la Lagrangiana è invariante per ogni trasformazione realizzata da una matrice  $U$  tale che

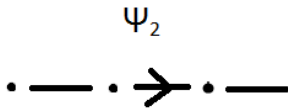
$$U^\dagger U = I, \text{ cioè } U \in U(2), \quad (12)$$

dove il gruppo  $U(2)$  può essere visto come prodotto  $U(2) = U(1) \times SU(2)$ . Rispetto al caso precedente abbiamo che la simmetria  $U(1)$  corrispondente alla conservazione della carica relativa è stata immersa in un gruppo più grande, il gruppo  $SU(2)$ , di cui ora costituisce una componente. Questa descrizione è facilmente comprensibile se descriviamo la simmetria del caso precedente in termini di carica totale e carica relativa. La conservazione della carica totale rimane nel nuovo gruppo come gruppo  $U(1)$  mentre la conservazione della carica relativa è associata alle trasformazioni del gruppo  $SU(2)$  generate dalla matrice di Pauli  $\sigma_3$ .

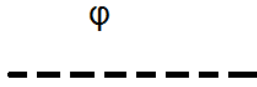
3. Le regole di Feynman sono:



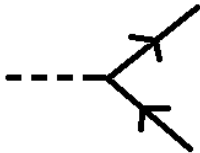
$$\frac{i(\not{p} + m_1)}{p^2 - m_1^2 + i\epsilon} \quad (13)$$



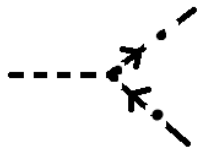
$$\frac{i(\not{p} + m_2)}{p^2 - m_2^2 + i\epsilon} \quad (14)$$



$$\frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon} \quad (15)$$



$$-g \quad (16)$$

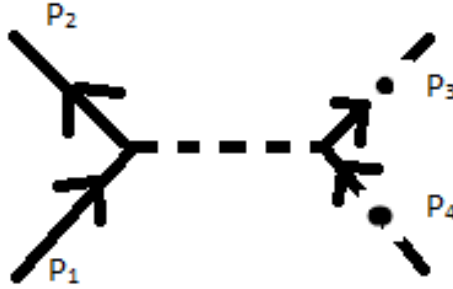


$$-g \quad (17)$$

4. Calcoliamo ora l'ampiezza invariante non polarizzata (cioè sommata sulle polarizzazioni dello stato finale e mediata su quelle dello stato iniziale) per il processo di annichilazione

$$f_1(p_1) \bar{f}_1(p_2) \rightarrow f_2(p_3) \bar{f}_2(p_4). \quad (18)$$

Al primo ordine vi è un solo diagramma di Feynman, in canale  $s$ :



L'ampiezza è

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_2(p_3) (-g) v_2(p_4) \frac{i}{s - m_\phi^2} \bar{v}_1(p_2) u_1(p_1), \quad (19)$$

di cui possiamo calcolare il modulo quadro sommato e mediato sulle polarizzazioni finali e iniziali

$$\begin{aligned} |M_{if}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_i, \lambda_f} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{4} \frac{1}{(s - m_\phi^2)^2} \\ &\quad \text{Tr} [(p_3 + m_2) (p_4 - m_2)] \text{Tr} [(p_2 - m_1) (p_1 + m_1)] \\ &= \frac{4g^4}{(s - m_\phi^2)^2} [(p_3 \cdot p_4) - m_2^2] [(p_2 \cdot p_1) - m_1^2] \\ &= \frac{g^4}{\left(1 - \frac{m_\phi^2}{s}\right)^2} \left(1 - \frac{4m_2^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_1^2}{s}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uso delle relazioni tra prodotti scalari degli impulsi e la variabile di Mandelstam  $s$

$$(p_1 \cdot p_2) = \frac{s}{2} - m_1^2 \quad (21)$$

$$(p_3 \cdot p_4) = \frac{s}{2} - m_2^2. \quad (22)$$

5. Lo spazio delle fasi a due corpi nel sistema del sistema del centro di massa può essere scritto come

$$df = \frac{1}{16\pi^2} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{E_3} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{E_4} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4). \quad (23)$$

Ora usiamo la delta spaziale per eseguire l'integrazione su  $\mathbf{p}_4$ . Poiché le masse delle particelle nello stato finale sono uguali,

$$E_3 = E_4. \quad (24)$$

Lo spazio delle fasi diventa

$$df = \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_3^2}{E_3^2} \delta(\sqrt{s} - 2E_3) dp_3 d\cos\theta d\phi. \quad (25)$$

La sezione d'urto per un processo  $2 \rightarrow 2$  è generalmente indipendente dall'angolo azimutale  $\phi$ . Inoltre, sfruttando l'ultima delta per eseguire l'integrazione sul modulo dell'impulso  $p_3$ , e ricordando che nel sistema del centro di massa  $s = 4E^2$ , dove  $E$  è l'energia delle particelle entranti, arriviamo alla forma finale dello spazio delle fasi

$$df = \frac{1}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_2^2}{s}} d\cos\theta = \frac{1}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{E^2}} d\cos\theta. \quad (26)$$

La sezione d'urto differenziale è data da

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} |M_{if}|^2 df \quad (27)$$

dove  $\Phi$  è il fattore di flusso

$$\Phi = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2) - m_1^4} = 2s\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{s}} = 8E\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{E^2}} = 8Ep. \quad (28)$$

Unendo l'espressione Eq. (20) per la matrice invariante, Eq. (26) per lo spazio delle fasi ed Eq. (28) per il fattore di flusso otteniamo la sezione d'urto differenziale, troviamo

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{g^4}{128\pi E^2} \frac{\left(1 - \frac{m_2^2}{E^2}\right)}{\left(1 - \frac{m_\phi^2}{4E^2}\right)^2} \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{E^2}} \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{E^2}} \quad (29)$$

6. Ad alta energia, cioè nella condizione,

$$s \gg \text{tutte le masse},$$

si ha

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{g^4}{128\pi E^2}. \quad (30)$$

In questo limite, la sezione d'urto dipende da un'unica variabile dimensionale, ossia  $E$ . Pertanto, per ragioni dimensionali

$$\sigma \sim \frac{1}{E^2}. \quad (31)$$

Per quanto concerne la dipendenza angolare, osserviamo che, in seguito alla forma del vertice di Yukawa, i fermioni nello stato iniziale hanno chiralità opposta, e così quelli nello stato finale. Ma nel limite di alta energia la chiralità è uguale all'elicità per un fermione ed a meno l'elicità per un antifermione. Pertanto le due particelle hanno elicità uguale, e quindi spin opposto nel sistema del centro di massa. Ne segue che il momento angolare totale è nullo sia per lo stato iniziale che per quello finale, e quindi la distribuzione angolare è isotropa.

Più difficile è dimostrare il motivo per cui la sezione d'urto è indipendente dall'angolo anche non ad alta energia. Questo si dimostra osservando che, poiché sia le particelle di stato iniziale sia quelle di stato finale hanno uguali masse, le componenti dell'elicità non legate alla chiralità si cancellano nel sistema del centro di massa. Il momento angolare totale iniziale e finale sono coa nulli in generale, e questo spiega la forma Eq. (29) della sezione d'urto, completamente indipendente da  $\theta$  a qualunque energia.