Esame Scritto di Fisica Teorica 1
Traccia di Soluzione

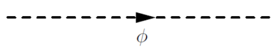
21 luglio 2015

Data la Lagrangiana proposta dall'esercizio, che qui riscriviamo esplicitando la derivata covariante

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + ieA^\mu \left(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^* \right) + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi, \tag{1}$$

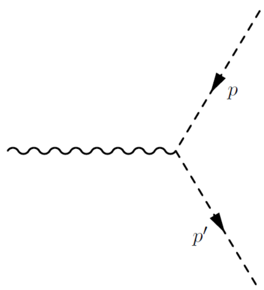
troviamo

1. le regole di Feynman:

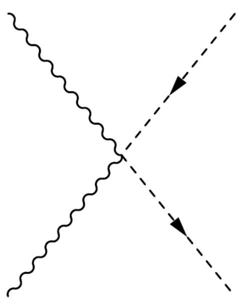


$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{2}$$

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \tag{3}$$

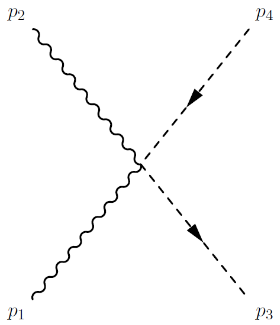


$$-i\, e \left(p^\mu + p'^\mu \right) \tag{4}$$

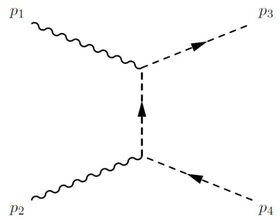


$$2i\, e^2 g^{\mu\nu} \tag{5}$$

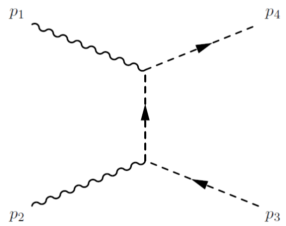
2. l'ampiezza non polarizzata del processo $\gamma\gamma \to \phi\phi$. I diagrammi di Feynman che contribuiscono al primo ordine perturbativo sono tre; le ampiezze associate sono:



$$\mathcal{M} = 2ie^2 g^{\mu\nu} \epsilon_\mu (p_1) \epsilon_\nu (p_2) \tag{6}$$



$$\mathcal{M} = \frac{ie^2}{t - m^2} \left[(2p_4 - p_2)^\mu (2p_3 - p_1)^\nu \right] \epsilon_\mu (p_1) \epsilon_\nu (p_2) \tag{7}$$



$$\mathcal{M} = \frac{ie^2}{u - m^2} \left[(2p_3 - p_2)^\mu (2p_4 - p_1)^\nu \right] \epsilon_\mu (p_1) \epsilon_\nu (p_2) \tag{8}$$

Si vede immediatamente che le Eq. (7) e (8) si ottengono l'una dall'altra scambiando p_3 con p_4.

3. l'ampiezza polarizzata per lo stesso processo. Date le polarizzazione dei fotoni iniziali

$$\epsilon_+^\mu (p_1) = - \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, i, 0) \tag{9}$$

$$\epsilon_-^\mu (p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -i, 0) \tag{10}$$

$$\epsilon_+^\mu (p_2) = - \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, i, 0) \tag{11}$$

$$\epsilon_-^\mu (p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, -i, 0) , \tag{12}$$

e gli impulsi delle quattro particelle nel sistema del centro di massa

$$p_1 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{s}}{2} \right) \tag{13a}$$

$$p_2 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{s}}{2} \right) \tag{13b}$$

$$p_3 = \left(\sqrt{p^2 + m^2}, p \sin\theta, 0, p \cos\theta \right) \tag{13c}$$

$$p_4 = \left(\sqrt{p^2 + m^2}, -p \sin\theta, 0, -p \cos\theta \right) \tag{13d}$$

ricaviamo che le ampiezze polarizzate indipendenti sono

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{++} = \mathcal{M}_{--} =& 2ie^2 \left[1 - \frac{2p^2 \sin^2\theta}{s\left(1 - \frac{2p}{\sqrt{s}}\cos\theta\right)} - \frac{2p^2 \sin^2\theta}{s\left(1 + \frac{2p}{\sqrt{s}}\cos\theta\right)} \right] \\
=& 2ie^2 \left[1 - \frac{2p^2 \sin^2\theta}{s\left(1 - \frac{4p^2}{s}\cos^2\theta\right)} \right] \qquad (14a) \\
\mathcal{M}_{+-} = \mathcal{M}_{-+} =& -2ie^2 \left[\frac{2p^2 \sin^2\theta}{s\left(1 - \frac{2p}{\sqrt{s}}\cos\theta\right)} + \frac{2p^2 \sin^2\theta}{s\left(1 + \frac{2p}{\sqrt{s}}\cos\theta\right)} \right] \\
=& -2ie^2 \left[\frac{2p^2 \sin^2\theta}{s\left(1 - \frac{4p^2}{s}\cos^2\theta\right)} \right]. \qquad (14b)
\end{aligned}$$

4. il modulo quadro dell'ampiezza polarizzata e non polarizzata. Vogliamo scrivere il risultato in funzione delle variabili θ e β definita come

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}. \qquad (15)$$

La conservazione del quadri-impulso implica

$$p = \frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} = \frac{\sqrt{s}}{2}\beta. \qquad (16)$$

Possiamo ora calcolare il modulo quadro delle Eqs. (14), ottenendo:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{+,+}|^2 = |\mathcal{M}_{-,-}|^2 =& 4e^4 \left[1 + \frac{1}{t - m^2} p^2 \sin^2\theta + \frac{1}{u - m^2} p^2 \sin^2\theta \right]^2, \\
=& 4e^4 \left[1 - \frac{\beta^2 \sin^2\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta} \right]^2 \qquad (17a) \\
|\mathcal{M}_{-,+}|^2 = |\mathcal{M}_{+,-}|^2 =& 4e^4 \left[\frac{1}{t - m^2} p^2 \sin^2\theta + \frac{1}{u - m^2} p^2 \sin^2\theta \right]^2 \\
=& 4e^4 \left[\frac{\beta^2 \sin^2\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta} \right]^2. \qquad (17b)
\end{aligned}$$

Leggermente più lungo il calcolo del modulo quadro per l'ampiezza non polarizzata. Prendendo il modulo quadro della somma dei tre diagrammi e mediando sulle polarizzazioni iniziali otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum |\mathcal{M}|^2 =& \frac{e^4}{4} \left[\frac{(2p_4 - p_2)^\mu (2p_3 - p_1)^\nu}{t - m^2} + \frac{(2p_3 - p_2)^\mu (2p_4 - p_1)^\nu}{u - m^2} + 2g^{\mu\nu} \right] \\
& \left[\frac{(2p_4 - p_2)^\rho (2p_3 - p_1)^\sigma}{t - m^2} + \frac{(2p_3 - p_2)^\rho (2p_4 - p_1)^\sigma}{u - m^2} + 2g^{\mu\nu} \right] (-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma}) \\
=& \frac{e^4}{4} \Bigg[\frac{(2p_4 - p_2)^2 (2p_3 - p_1)^2}{(t - m^2)^2} + \frac{(2p_3 - p_2)^2 (2p_4 - p_1)^2}{(u - m^2)^2} + \\
& + 2\frac{((2p_4 - p_2)\cdot(2p_3 - p_2))((2p_3 - p_1)\cdot(2p_4 - p_1))}{(t - m^2)(u - m^2)} \\
& + \frac{4((2p_4 - p_2)\cdot(2p_3 - p_1))}{t - m^2} + \frac{4((2p_3 - p_2)\cdot(2p_4 - p_1))}{u - m^2} + 16 \Bigg]. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Ora per semplificare questa espressione e scriverla in funzione solo di β e θ utilizziamo le seguenti espressioni per t e u

$$\left(t - m^2\right) = -\frac{s}{2}\left(1 - \beta\cos\theta\right), \tag{19}$$
$$\left(u - m^2\right) = -\frac{s}{2}\left(1 + \beta\cos\theta\right). \tag{20}$$

e per i prodotti scalari tra i quadri-impulsi p_i

$$(p_1 \cdot p_2) = \frac{s}{2} \tag{21a}$$
$$(p_3 \cdot p_4) = \frac{s}{2} - m^2 \tag{21b}$$
$$(p_1 \cdot p_3) = (p_2 \cdot p_4) = \frac{m^2 - t}{2} \tag{21c}$$
$$(p_2 \cdot p_3) = (p_1 \cdot p_4) = \frac{m^2 - u}{2}. \tag{21d}$$

Otteniamo così

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = \\
&= \frac{e^4}{4}\left[4\left(\frac{t+m^2}{t-m^2}\right)^2 + 4\left(\frac{u+m^2}{u-m^2}\right)^2 + 2\frac{\left(s-4m^2\right)^2}{\left(u-m^2\right)\left(t-m^2\right)} + \frac{2\left(s-8m^2\right)}{t-m^2} + \frac{2\left(s-8m^2\right)}{u-m^2}\right] \\
&= \frac{e^4}{4}\left[8 + 16m^4\left(\frac{1}{\left(t-m^2\right)^2} + \frac{1}{\left(u-m^2\right)^2}\right) + 2\frac{\left(s-4m^2\right)^2}{\left(u-m^2\right)\left(t-m^2\right)} + 2s\left(\frac{1}{t-m^2} + \frac{1}{u-m^2}\right)\right] \\
&= 2e^4\left[1 + \frac{\left(1 - 2\beta^2 + \beta^4\right)\left(1 + \beta^2\cos^2\theta\right)}{\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)^2} + \frac{\beta^4}{1 - \beta^2\cos^2\theta} - \frac{1}{1 - \beta^2\cos^2\theta}\right] \\
&= 2e^4\left[1 - \frac{2\beta^2\left(1-\beta^2\right)\sin^2\theta}{\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)^2}\right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Possiamo verificare che la media dei moduli quadri polarizzati, Eqs. (17), coincida con questo risultato.

5. Lo spazio delle fasi a due corpi nel sistema del centro di massa può essere scritto come

$$df = \frac{1}{16\pi^2}\frac{d^3\mathbf{p_3}}{E_3}\frac{d^3\mathbf{p_4}}{E_4}\delta\left(\sqrt{s} - E_3 - E_4\right)\delta^{(3)}\left(\mathbf{p_3} + \mathbf{p_4}\right). \tag{23}$$

Ora usiamo la delta spaziale per eseguire l'integrale su $\mathbf{p_4}$, trovando anche che, essendo le masse delle particelle nello stato finali uguali,

$$E_3 = E_4. \tag{24}$$

Lo spazio delle fasi si semplifica nel seguente modo

$$df = \frac{1}{16\pi^2}\frac{p_3^2}{E_3^2}\delta\left(\sqrt{s} - 2E_3\right)dp_3\, d\cos\theta\, d\phi. \tag{25}$$

Nei processi $2 \to 2$, per considerazioni cinematiche, non si può avere dipendenza dall'angolo azimutale ϕ. È quindi possibile in modo del tutto generale integrare sopra questa variabile. In più utilizzando l'ultima delta per eliminare l'integrazione sul modulo di p_3

$$|\mathbf{p_3}| = p = \frac{\sqrt{s}}{2}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} = \frac{\sqrt{s}}{2}\beta \tag{26}$$

possiamo giungere alla forma finale dello spazio delle fasi

$$df = \frac{1}{16\pi}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\,d\cos\theta = \frac{1}{16\pi}\beta\,d\cos\theta. \tag{27}$$

La sezione d'urto differenziale è ora da

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi}\left|M_{if}\right|^2 df \tag{28}$$

dove Φ è il fattore di flusso

$$\Phi = 4p_1\cdot p_2 = 2s. \tag{29}$$

Otteniamo quindi

$$\frac{d\sigma_{+,+}}{d\cos\theta} = \frac{d\sigma_{-,-}}{d\cos\theta} = \frac{e^4}{8\pi s}\beta\left[1-\frac{\beta^2\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}\right]^2, \tag{30}$$

$$\frac{d\sigma_{-,+}}{d\cos\theta} = \frac{d\sigma_{+,-}}{d\cos\theta} = \frac{e^4}{8\pi s}\beta\left[\frac{\beta^2\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}\right]^2 \tag{31}$$

per le sezioni d'urto differenziali polarizzate e

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{e^4}{16\pi s}\beta\left[1-\frac{2\beta^2\left(1-\beta^2\right)\left(1-\cos^2\theta\right)}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^2}\right] \tag{32}$$

per quella non polarizzata.

6. Nel limite di alta energia

$$s \gg \mathit{tutte\,le\,masse} \to \beta \to 1 \tag{33}$$

le varie sezioni d'urto appena trovate si semplificano molto:

$$\frac{d\sigma_{+,+}}{d\cos\theta} = \frac{d\sigma_{-,-}}{d\cos\theta} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{d\sigma_{+,-}}{d\cos\theta} = \frac{d\sigma_{-,+}}{d\cos\theta} = \frac{e^4}{8\pi s}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{e^4}{16\pi s}, \tag{35}$$

diventando tutte indipendenti dall'angolo e assumendo la dipendenza da s prevista dall'analisi dimensionale.