Problemi per il corso di
teoria delle interazioni fondamentali
maggio 2007

Primo Modulo

1. **Urto elettrone-protone.**

   Considare l'urto elastico elettrone-protone in QED, ossia il processo $e^- p \to e^- p$, nel limite in cui si può trascurare la massa dell'elettrone.

   (a) Dimostrare che il vertice fotone-nucleone definito da

   $$\langle p'| \int d^4 x J^\mu(x) A_\mu(x) |p\rangle = e\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)\varepsilon_\mu(q)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p')$$

   può essere parametrizzato mediante due fattori di forma $F_i(q^2)$ con $q_\mu = p_\mu - p'_\mu$:

   $$\Gamma^\mu = F_1(q^2)\gamma^\mu + \kappa F_2(q^2)\frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2M_p}q^\nu$$

   normalizzati come $F_1(0) = F_2(0) = 1$.

   (b) Determinare la sezione d'urto differenziale nel sistema di riferimento di quiete del protone iniziale in termini dell'energia E dell'elettrone incidente e dell'angolo θ di diffusione dell'elettrone (formula di Rosenbluth).

2. **Self-energia nella teoria di Yukawa** Considerare una teoria contenente un campo scalare reale ϕ di massa M accoppiato ad un campo fermionico di Dirac ψ di massa m attraverso l'interazione di Yukawa

   $$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\phi.$$

   (a) Determinare le regole di Feynman per questa teoria.

   (b) Esprimere il propagatore fermionico come

   $$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon - \Sigma(\not{p})}$$

   e determinare esplicitamente $\Sigma(\not{p})$ (self–energia) all'ordine g^2.

(c) Supporre che il campo fermionico fisico ψ e la massa fisica m siano legati alle quantità che compaiono nella lagrangiana da

$$\begin{aligned} \psi_{\text{phys}} &= Z_\psi^{-1}\psi \\ m_{\text{phys}} &= Z_m^{-1} m \end{aligned}$$

e determinare le costanti Z_ψ e Z_m in modo da eliminare le divergenze nel propagatore.

3. **Processo di Drell-Yan ad alta energia**
Considerare il processo $q\bar{q} \to \mu^+\mu^-$ dove q è un quark up o down nel modello standard elettrodebole.

(a) Determinare in termini di invarianti di Mandelstam la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{dt}$. Supporre che l'energia del centro di massa della collisione sia $s > M_z^2$.

(b) Utilizzare il risultato del punto precedente per determinare la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{dp_T^2}$ dove $\vec{p}_T$ e' l'impulso trasverso del muone, ossia la componente del tri-impulso del muone nel piano ortogonale alla direzione delle particelle nello stato inziale.

4. **Decadimento del pione**
Considerare il decadimento $\pi^+ \to \ell^+\nu_\ell$ dove ℓ^+ è un (anti)leptone carico (positrone o muone+) e ν_ℓ il relativo neutrino, nell'ambito della teoria di Fermi.

(a) Dimostrare che l'elemento di matrice della corrente adronica $J_h^\mu \equiv \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d$ tra il vuoto e uno stato di pione con impulso p ha la forma

$$\langle 0|J_h^\mu|\pi^+(p)\rangle = i\sqrt{2} f_\pi p_\mu,$$

dove f_π è una costante con le dimensioni di massa.

(b) Calcolare il tasso di decadimento in funzione di f_π, m_π e m_ℓ (rispettivamente massa del pione e del leptone carico).

(c) Calcolare il rapporto tra il tasso di decadimento in positroni e muoni per valori realistici delle masse e discutere il risultato.

Secondo Modulo

5. **Limite di unitarietà sulla massa del bosone di Higgs**

Considerare lo scattering di due bosoni di gauge massivi con polarizzazione longitudinale.

(a) Disegnare tutti i diagrammi di Feynman che contribuiscono ai processi $W_L^{\pm} W_L^{\pm} \to W_L^{\pm} W_L^{\pm}$, $W_L^{+} W_L^{-} \to W_L^{+} W_L^{-}$, $Z_L Z_L \to Z_L Z_L$ al più basso ordine perturbativo.

(b) Nel caso dello scattering $W_L^{+} W_L^{-} \to W_L^{+} W_L^{-}$, determinare l'ampiezza per il processo dai diagrammi dati al punto precedente. Verificare il teorema di equivalenza, secondo cui questa ampiezza coincide con quella che si ottiene sostituendo ciascun bosone polarizzato longitudinalmente con il corrispondente pseudo-bosone di Goldstone (scalare non fisico), a meno di termini di ordine $\mathcal{O}(m_V/\sqrt{s})$ nel limite di grande s.

(c) Considerare le ampiezze con gli pseudo-bosoni di Goldstone sulle linee esterne determinate al punto precedente nel limite in cui la massa dello scalare di Higgs fisico tende a infinito. Utilizzando lo sviluppo in onde parziali dell'ampiezza di scattering

$$\mathcal{M}(s,t) = 16\pi \sum_l (2l+1)\ a_l(s)\ P_l(\cos\theta),$$

dove

$$a_l(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{1} d\cos\theta\ P_l(\cos\theta) \mathcal{M}(s,t)$$

e $P_l(\cos\theta)$ sono i polinomi di Legendre, mostrare che la condizione di unitarietà tale per cui $|a_l(s)| \leq 1$ per ogni l impone un limite superiore alla massa del bosone di Higgs fisico e determinare tale limite.

6. **Asimmetria forward-backward e sezione d'urto totale alla risonanza dello Z_0**

Considerare il processo di scattering $e^+e^- \to f\bar{f},\ f \neq e$ nel modello standard elettrodebole.

(a) Calcolare al più basso ordine perturbativo la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\cos\theta$. Trascurare le masse dei fermioni, ma fornire un'espressione valida anche nella regione di energia prossima alla massa del bosone Z_0.

(b) Determinare l'asimmetria *forward–backward*

$$A_{FB}(s) = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B}$$

dove

$$\sigma_F = \int_0^1 d\cos\theta \left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right), \quad \sigma_B = \int_{-1}^0 d\cos\theta \left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right).$$

Dimostrare che, per $\sqrt{s} = m_Z$ il contributo del diagramma con lo scambio di un fotone è trascurabile, e l'asimmetria *forward–backward può* essere scritta come

$$A_{FB} = \frac{3}{4}\mathcal{A}_e\mathcal{A}_f \quad \text{dove} \quad \mathcal{A}_f = \frac{2\, g_V^f g_A^f}{(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2},$$

dove $g_{V,A}^f$ sono gli accoppiamenti vettoriale e assiale del bosone Z_0 al fermione f.

(c) Dimostrare che per $\sqrt{s} = m_Z$ nell'approssimazione del punto precedente la sezione d'urto totale soddisfa la relazione

$$\sigma_{tot}(s) \;=\; 12\pi\, \frac{\Gamma(Z \to e^+e^-)\; \Gamma(Z \to f\bar{f})}{\Gamma_Z^2\; m_Z^2},$$

dove Γ_Z è la larghezza totale di decadimento del bosone Z_0.

7. **Urto profondamente inelastico all'ordine α_s**

Considerare il processo $q + \gamma^* \to X$ a livello partonico.

(a) Introdurre la parametrizzazione del tensore adronico

$$W^{\mu\nu}(p,q) = -\left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2}\right) F_1(x,Q^2) + \\ + \frac{2x}{Q^2}\left(p^\mu + \frac{q^\mu}{2x}\right)\left(p^\nu + \frac{q^\nu}{2x}\right) F_2(x,Q^2)$$

e dimostrare che in $4-2\varepsilon$ dimensioni la funzione di struttura $F_2(x,Q^2)$ è data da

$$F_2(x,Q^2) = P_{\mu\nu} W^{\mu\nu},$$

dove si è definito

$$P_{\mu\nu} \equiv \frac{x}{\epsilon - 1}\left[g_{\mu\nu} + \frac{4x^2(2\epsilon - 3)}{Q^2}\, p_\mu p_\nu\right].$$

(b) Calcolare al più basso ordine perturbativo $F_2(x,Q^2)$, osservando che

$$W^{(0)}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\int d\phi_1(p')\,\left[\mathcal{M}^{(0)}_\mu\right]\left[\mathcal{M}^{(0)}_\nu\right]^*,$$

dove $\mathcal{M}^{(0)}_\mu$ è l'elemento di matrice per la transizione $q+\gamma^* \to q$ e $d\phi_1(p')$ è l'integrale sullo spazio delle fasi del quark nello stato finale. Eseguire il calcolo in $d=4$

(c) Calcolare la correzione al primo ordine a $F_2(x,Q^2)$ con un quark entrante dovuta all'emissione di un gluone reale, utilizzando l'espressione

$$W_{\mu\nu}{}^{(1)}_{qg} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\int d\phi_2(p',k)\,\left[\mathcal{M}^{(1)}_{qg\;\mu}\right]\left[\mathcal{M}^{(1)}_{qg\;\nu}\right]^*,$$

dove $\mathcal{M}^{(1)}_{qg\;\mu}$ è l'elemento di matrice per la transizione $q+\gamma^* \to q+g$ e $d\phi_2(p',k)$ è l'integrale sullo spazio delle fasi della coppia quark-gluone nello stato finale. Eseguire il calcolo in d dimensioni, nel sistema del centro di massa. Parametrizzare la cinematica in termini di x (variabile di Bjorken per l'urto $q\gamma^*$) e $y \equiv \frac{1+\cos\theta}{2}$, dove θ è l'angolo del gluone emesso rispetto all'asse della collisione

(d) La correzione virtuale al primo ordine a $F_2(x,Q^2)$ è data da

$$\left[F_2^{(1)}(x,Q^2,\epsilon)\right]_{\rm virt} = -(Q^2)^{-\epsilon}\,(4\pi)^\epsilon\,\frac{C_{\rm F}}{\pi}\,\frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}\;\times$$
$$\times\frac{1-\epsilon}{1-2\epsilon}\frac{1}{\epsilon^2}\left(1+\frac{\epsilon}{2}+\frac{3}{2}\epsilon^2\right)\,\delta(1-x).$$

Sommare questa correzione al contributo di emissione reale calcolato al punto precedente e verificare la cancellazione delle singolarità infrarosse, sfruttando l'identità

$$\frac{1}{(1-x)^{1+\epsilon}} = -\frac{1}{\epsilon}\delta(1-x) + \left[\frac{1}{1-x}\right]_+ - \epsilon\left[\frac{\ln(1-x)}{1-x}\right]_+ + O(\epsilon^2).$$

(e) Identificare il coefficiente della singolarità collineare nel risultato finale per la correzione al primo ordine calcolato al punto precedente e verificare che esso è proporzionale alla *splitting function* P_{qq} di Altarelli-Parisi. Fattorizzare la singolarità e determinare il risultato finito per la funzione di struttura.

8. **Equazione di evoluzione leading e next-to-leading**

Considerare le equazioni di evoluzione accoppiate per quark e gluoni

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} \begin{pmatrix} \Sigma(x,Q^2) \\ g(x,Q^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{qq}(x,Q^2) & P_{qg}(x,Q^2) \\ P_{gq}(x,Q^2) & P_{gg}(x,Q^2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \Sigma(x,Q^2) \\ g(x,Q^2) \end{pmatrix}$$

dove Σ è la distribuzione di quark di singoletto

$$\Sigma(x,Q^2) \equiv \sum_{i=1}^{n_f} \Big(q_i(x,Q^2) + \bar{q}_i(x,Q^2) \Big),$$

$g(x,Q^2)$ la distribuzione di gluoni, $\otimes$ denota convoluzione e le *splitting functions* ammettono lo sviluppo perturbativo

$$P_{ij}(x,Q^2) = \alpha_s(Q^2) P_{ij}^{(0)}(x,Q^2) + \alpha_s^2(Q^2) P_{ij}^{(1)}(x,Q^2) + \ldots$$

(a) Determinare la soluzione delle equazioni di evoluzione quando le splitting function sono sviluppate al primo ordine, utilizzando la trasformazione di Mellin per ridurre le equazioni ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine accoppiate.

(b) Determinare la soluzione delle equazioni di evoluzione quando le splitting functions sono sviluppate fino all'ordine α_s^2. Determinare la soluzione come una serie in α tenendo solo termini fino all'ordine *next-to-leading log.*

(c) Sfruttando le relazioni di conservazione dell'impulso

$$\int_0^1 \Big(P_{qq}(x,Q^2) + P_{gq}(x,Q^2) \Big) = \int_0^1 \Big(P_{gq}(x,Q^2) + P_{gg}(x,Q^2) \Big) = 0$$

e la soluzione determinata al punto precedente, dimostrare che quando $Q^2 \to \infty$ le frazioni di impulso di un qualunque adrone portate da quark e gluoni sono fissate. Determinare queste frazioni sapendo che

$$\int_0^1 x P_{qq}(x,Q^2) = -\frac{16}{9}; \quad \int_0^1 x P_{qg}(x,Q^2) = \frac{n_f}{3}.$$