Problemi per il corso di
teoria delle interazioni fondamentali
gennaio 2013

Primo Modulo

1. **Urto Bhabha in QED**
   Considerare il processo $e^+e^- \to e^+e^-$ nella regione di energia per cui la massa degli elettroni é trascurabile, ma il contributo dovuto allo scambio di un bosone Z è anch'esso trascurabile.

   (a) Si determini la sezione d'urto per il processo in termini di invarianti di Mandelstam.

   (b) Si scriva quindi la sezione d'urto nel sistema del centro di massa in termini di energia ed angolo. Se ne discuta la dipendenza angolare, ed il comportamento nel limite $\theta \to 0$.

2. **Self-energia dell'elettrone.**

   Considerare la prima correzione di ordine superiore al propagatore di un elettrone di impulso p^μ in QED.

   (a) Si scriva il risultato nella forma

   $$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p})}$$

   e si determini la funzione $\Sigma(\not{p})$ (self-energia dell'elettrone).

   (b) Si determini la posizione del polo del propagatore $S(p)$, la si interpreti come massa fisica m_{phys}, e si calcoli la massa fisica m_{phys} così definita in termini del parametro m che compare nella lagrangiana. Si mostri che essa è affetta da una divergenza ultravioletta, e si usi la regolarizzazione dimensionale per trattare questa divergenza.

   (c) Si ridefinisca la normalizzazione del propagatore come

   $$S_{\text{phys}}(p) = \frac{Z_2}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p})}$$

   e si determini la costante Z_2 al primo ordine non banale nella costante d'accoppiamento imponendo la condizione che il residuo di $S_{\rm phys}(p)$ al polo fisico $m_{\rm phys}$ sia uguale al residuo del propagatore libero al polo m. Si dimostri che questo è sufficiente a rimuovere la divergenza ultravioletta in m.

3. **Urto Bhabha nel modello standard**

Si consideri nuovamente il processo $e^+e^- \to e^+e^-$ ma ora nella regione dove il contributo dovuto allo scambio di Z non è trascurabile.

(a) Si disegnino i diagrammi di Feynman per il processo includendo anche il contributo dovuto allo scambio di Z, e si arguisca che nella regione in cui $s \sim M_Z^2$ uno solo tra questi dá il contributo dominante.

(b) Si determini la sezione d'urto nell'approssimazione del punto precedente.

(c) Si determini l'asimmetria forward-backward definita come

$$A(\theta) \equiv \frac{\sigma(\theta) - \sigma(\pi - \theta)}{\sigma(\theta) + \sigma(\pi - \theta)}.$$

4. **Decadimento del τ in ρ**

Si consideri il decadimento $\tau \to \rho \nu_\tau$, dove la ρ è una particella avente isospin $I = 1$, spin $s = 1$ e massa $m \approx 770$ MeV.

(a) Si scriva l'ampiezza di decadimento parametrizzando l'elemento di matrice della corrente adronica come

$$\langle \rho(q) | \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 d | 0 \rangle = i\sqrt{2} \varphi_\mu g_\rho,$$

dove g_ρ è un parametro con le dimensioni di massa^2, e φ_μ (funzione d'onda della ρ è un quadrivettore che soddisfa alla condizione $\varphi_\mu q^\mu = 0$, dove q^μ è il quadri-impulso della rho.

(b) Si calcoli la larghezza totale di decadimento.

Secondo Modulo

1. **Decadimento del mesone B_u^+**

Si consideri il mesone B_u^+, costiituito dallo stato legato di una coppia di quarks $u\bar{b}$, e se ne studi il decadimento $B_u^+ \to \tau^+ \nu_\tau$.

(a) Si descriva il decadimento nel Modello Standard all'ordine perturbativo più basso, trascurando le masse del quark u e del neutrino ν_τ, ma mantenendo invece la dipendenza dalle masse del quark b e del leptone τ. Si calcoli la larghezza totale di decadimento in gauge di Feynman, includendo sia il contributo del W che quello degli scalari non fisici.

(b) Si mostri come la tasso di decadimento calcolato al punto precedente si possa ottenere nella teoria di Fermi, e si discuta la bontà dell'approssimazione.

(c) Si supponga che esista un nuovo campo scalare carico (come per esempio un bosone di Higgs carico in una estensione del Modello Standard), accoppiato a tutte le correnti cariche, sia leptoniche che di quark. Si determini la larghezza totale di decadimento includendo anche l'interazione con questo campo, e si discuta come variano la larghezza totale di decadimento del mesone B_u^+ a causa dei nuovi termini di interazione, in funzione della massa o dell'accoppiamento della nuova particella.

2. **Produzione del bosone di Higgs in fusione di gluoni**

Si consideri la produzione a un collisore adronico di un bosone di Higgs attraverso il processo partonico di fusione di gluoni $g(q_1)g(q_2) \to H$, all'ordine perturbativo più basso nel Modello Standard.

(a) Si scriva la più generale decomposizione di un'ampiezza $\mathcal{M}^{\mu\nu}(q_1, q_2)$, introducendo opportuni fattori di forma e si ricavi il numero di fattori di forma indipendenti, imponendo l'invarianza di gauge, ovvero le condizioni $q_1^\mu \mathcal{M}^{\mu\nu} = q_2^\nu \mathcal{M}^{\mu\nu} = 0$, e sfruttando il fatto che i due gluoni esterni sono on-shell, ovvero che $q_1^2 = q_2^2 = 0$. Si determini il proiettore $\Pi_{\mu\nu}$ che, applicato all'ampiezza, estrae ciascuno dei fattori di forma indipendenti.

(b) Si scriva l'ampiezza per il processo partonico $gg \to H$, includendo solo il contributo dovuto al quark top, di massa m_t, utilizzando in ogni passaggio la regolarizzazione dimensionale.

(c) Si applichi all'ampiezza il proiettore determinato nel punto precedente. Si esprima quindi il contributo dell'ampiezza al fattore di forma in termini di integrali scalari di base, ovvero integrali senza potenze dell'impulso di loop a numeratore,

$$B_0(q, m_t, m_t) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{\left[k^2 - m_t^2 + i\varepsilon\right] \left[(k+q)^2 - m_t^2 + i\varepsilon\right]}$$

e

$$C_0(q_1, q_2, m_t, m_t, m_t) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{\left[k^2 - m_t^2 + i\varepsilon\right]\left[(k+q_1)^2 - m_t^2 + i\varepsilon\right]\left[(k-q_2)^2 - m_t^2 + i\varepsilon\right]}$$

Questo risultato può essere raggiunto utilizzando semplici identità algebriche. Nel caso in cui queste non siano sufficienti a semplificare completamente l'espressione, si osservi che

$$B^\mu(q, m_t, m_t) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu}{\left[k^2 - m_t^2 + i\varepsilon\right]\left[(k+q)^2 - m_t^2 + i\varepsilon\right]} \equiv q^\mu B_1(q, m_t, m_t) \quad (1)$$

$$B_1(q, m_t, m_t) = -\frac{1}{2} B_0(q, m_t, m_t) \quad (2)$$

(d) Si calcoli il limite per $m_t \to \infty$ dell'ampiezza, nota l'espressione dell'integrale scalare

$$C_0(q_1, q_2, m_t, m_t, m_t) = \frac{1}{4 q_1 \cdot q_2} \log^2 \left(\frac{\sqrt{2q_1 \cdot q_2 - 4m_t^2} - \sqrt{2q_1 \cdot q_2}}{\sqrt{2q_1 \cdot q_2 - 4m_t^2} + \sqrt{2q_1 \cdot q_2}} \right)$$

(e) Si calcoli il modulo quadro dell'ampiezza mediato sui gradi di libertà di polarizzazione e di colore dei gluoni di stato iniziale.

(f) Si calcoli la sezione d'urto totale del processo $gg \to H$.

3. **Produzione di** Z' Si consideri la produzione di una coppia di leptoni attraverso annichilazione quark-antiquark in collisioni adroniche, supponendo che il processo possa essere mediato, oltre che da un fotone e da uno Z, anche dallo scambio di un bosone neutro massivo di spin uno, denominato Z', di massa pari a 5 TeV ed avente accoppiamenti ai fermioni analoghi a quelli dello Z standard, dipendenti dalla specie fermionica e con parti vettoriale e vettoriale-assiale distinte.

   (a) Si scriva l'espressione fattorizzata per la sezione d'urto di produzione quando l'energia nel centro di massa è prossima alla massa della Z', usando l'approssimazione introdotta nel problema (2) del primo modulo.

   (b) Si determini ora la sezione d'urto partonica nel caso di energia nel centro di massa generica, e si confronti con il risultato corrispondente all'approssimazione del punto precedente.

(c) Si discuta l'andamento della sezione d'urto determinata al punto precedente in funzione dell'energia nel centro di massa partonico, considerando l'intervallo da 0 a 5.5 TeV. Si discuta come il risultato dipende dal valore degli accoppiamenti.

(d) Si determini l'asimmetria forward-backward definita come nel problema (2) del primo modulo, e se ne discuta l'andamento in funzione dell'energia per fisso valore dell'angolo di scattering θ del leptone carico positivamente.

(e) Si scriva l'espressione della sezione d'urto adronica totale per la produzione di una coppia di leptoni di massa invariante data, e si discuta l'intervallo di x partonico rilevante per la produzione dello Z'.

4. **Funzione di struttura del charm negli schemi a tre e quattro flavor** Si consideri il contributo del quark charm $F_2^c(x, Q^2)$ alla funzione di struttura profondamente inelastica $F_2(x, Q^2)$, definito come la funzione di struttura $F_2(x, Q^2)$ che si otterrebbe se solo il quark charm avesse carica elettrica non-nulla.

   (a) Si considerino in alternativa uno schema in cui $n_f = 3$, cioé vi sono solo tre flavor di quark a massa nulla, oppure uno schema in cui $n_f = 4$ ed anche il charm è considerato come un partone a massa nulla. Si scriva l'espressione per $F_2^c(x, Q^2)$ al primo ordine non banale in α_s in entrambi gli schemi in termini della splitting function di Altarelli-Parisi, trascurando termini di ordine $\frac{m_c^2}{Q^2}$. Si disegnino i diagrammi di Feynman corrispondenti.

   (b) Nello schema a quattro flavor, si supponga che la distribuzione di quark charm si annulli quando $Q^2 \leq m_c^2$. Si scriva la soluzione delle equazioni di Altarelli-Parisi per il quark c sotto questa ipotesi, e la si usi per ricavare una espressione di $F_2^c(x, Q^2)$.

   (c) Si determini la dipendenza da $\ln Q^2$ di $F_2^c(x, Q^2)$ nei due schemi, utilizzando le espressioni calcolate al punto precedente, e se ne determini la differenza.

   (d) Si determini l'espressione di $F_2^c(x, Q^2)$ al secondo ordine non banale in α_s nello schema in cui $n_f = 3$, sfruttando il risultato ottenuto al punto precedente, e supponendo che le espressioni trovate nei due schemi coincidano.

   (e) Si determinino ora nuovamente la dipendenza da $\ln Q^2$ di $F_2^c(x, Q^2)$ nei due schemi e la loro differenza, e si discuta, confrontando il risultato con quello del punto c) come il risultato cambia al crescere dell'ordine perturbativo.