ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

24 gennaio 2006

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

(1) Si calcolino i commutatori

$$[L^i, x^j], \quad [L^i, x^2], \quad [L^i, p^2] \tag{1}$$

dove L^i è l'operatore momento angolare lungo l'asse i–esimo e $\vec{p}$, $\vec{x}$ sono rispettivamente gli operatori posizione ed impulso, di componenti x^i e p^i e modulo quadro $x^2 = x^i x^i$ e $p^2 = p^i p^i$. Si interpreti il risultato.

(2) Si dimostri che se in uno stato $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|L^2|\psi\rangle = 0 \tag{2}$$

allora per tutte le componenti del momento angolare

$$\langle\psi|L^i|\psi\rangle = 0 \tag{3}$$

Suggerimento: Si sviluppi $|\psi\rangle$ su una base di autofunzioni del momento angolare.

(3) Si dimostri che la funzione d'onda nella rappresentazione delle coordinate

$$\psi_{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \vec{x}\psi(x^2), \tag{4}$$

(dove x^2 è definito come nella domanda (1) e $\vec{v}$ è un tri-vettore fisso qualunque) è un'autofunzione dell'operatore L^2, e si determini l'autovalore associato.
Suggerimento: Si ricordi l'identità $\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ajk} = 2\delta_{ai}$.

(4) Si determini la legge di evoluzione temporale per le componenti dell'operatore momento angolare in rappresentazione di Heisenberg, $\frac{dL^i_H}{dt}$, per un sistema la cui evoluzione temporale è data dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + B(xp_y - yp_x), \tag{5}$$

dove x, y sono componenti dell'operatore posizione, p_x p_y componenti del'operatore impulso, e B è una costante numerica.

(5) Si determini esplicitamente la dipendenza dal tempo $L_i(t)$ di tutte le componenti dell'operatore momento angolare in rappresentazione di Heisenberg. Si interpreti il risultato.