ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

21 febbraio 2006

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

(1) Si determinino per una particella libera unidimensionale, la cui evoluzione temporale è data dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{1}$$

le seguenti derivate temporali di operatori:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt}, \quad \frac{dp}{dt}, \quad \frac{dp^2}{dt},$$

dove tutti gli operatori sono in rappresentazione di Heisenberg.

(2) Si determini, utilizzando il risultato della precedente domanda, la derivata temporale della dispersione $(\Delta x)^2$ in uno stato $|\psi_0\rangle$, ossia

$$\frac{d}{dt}(\Delta x)^2 = \langle\psi_0|\frac{d}{dt}x^2|\psi_0\rangle - \frac{d}{dt}\left(\langle\psi_0|x|\psi_0\rangle\right)^2. \tag{2}$$

(3) Si supponga che lo stato $|\psi_0\rangle$ sia un pacchetto gaussiano, ossia che nella rappresentazione delle coordinate abbia funzione d'onda

$$\langle x|\psi_0\rangle = \psi_0(x) = N \exp\left[-\frac{x^2}{4\left(\Delta x_0\right)^2}\right], \tag{3}$$

dove Δx_0 è un parametro numerico ed N è una costante di normalizzazione fissata dalla condizione $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$. Si utilizzi il risultato della domanda precendente per calcolare la dipendenza dal tempo della dispersione $(\Delta x)^2(t)$ in questo stato.
Suggerimento: Si usi la rappresentazione delle coordinate $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$.

(4) Si determini la dipendenza dal tempo della dispersione in impulso $(\Delta p)^2(t)$ nello stesso stato. Si interpreti il risultato.

(5) Si supponga ora che l'Hamiltioniana contenga anche un termine di potenziale corrispondente ad una forza costante, cioè

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx, \tag{4}$$

dove x è l'operatore posizione ed F è una costante reale positiva. Si determinino le dipendenze dal tempo $x(t)$ e $p(t)$ degli operatori posizione ed impulso in rappresentazione di Heisenberg. Si discuta la differenza tra questo caso ed il caso libero della prima domanda.