ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

22 giugno 2004

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema il cui stato al tempo $t = -T$ è dato da

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \tag{1}$$

dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato di un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza ω:

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle \tag{2}$$

con l'operatore di creazione dato da

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right). \tag{3}$$

A partire dal tempo $t = -T$ e fino al tempo $t = 0$ l'evoluzione temporale del sistema è data dall'hamiltoniana dell'oscillatore armonico

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{4}$$

A partire dal tempo $t = 0$ il sistema è perturbato da un potenziale avente la forma (in rappresentazione di Schrödinger)

$$V = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ V_0\, x & \text{per } t > 0 \end{cases}, \tag{5}$$

dove V_0 è una costante.
Per tutti i tempi $t > -T$, si consideri l'evoluzione temporale del sistema in rappresentazione di interazione, prendendo l'hamiltoniana H_0 eq. (4) come hamiltoniana imperturbata, e il potenziale V eq. (5) come perturbazione.

Domande

(1) Calcolare il valore medio di posizione ed impulso nello stato iniziale, al tempo iniziale $t = -T$.

(2) Calcolare *in rappresentazione di interazione* la dipendenza dal tempo degli operatori x e p per ogni tempo $t > -T$.

(3) Scrivere il potenziale eq. (5) in rappresentazione di interazione.

(4) Calcolare in funzione del tempo t ed all'ordine più basso della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo la probabilità che il sistema, per effetto della perturbazione eq. (5), subisca una transizione dallo stato in cui si trovava al tempo iniziale $t = -T$ allo stato dato (in rappresentazione di interazione) da

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger |1\rangle, \tag{6}$$

con $|1\rangle$ dato dalla eq. (2).

(5) L'hamiltoniana libera è invariante per traslazioni? La perturbazione è invariante per traslazioni? Interpretare in termini dell'invarianza o non–invarianza per traslazioni dell'hamiltoniana libera la risposta precedentemente data alla domanda 2.

(6) Interpretare in termini dell'invarianza o non–invarianza per traslazioni della perturbazione la risposta precedentemente data alla domanda 4.