ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

28 giugno 2005

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

(1) Considerare un sistema di due particelle identiche libere in una dimensione spaziale, descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}. \tag{1}$$

Determinare le autofunzioni $\langle q_1, q_2|\psi\rangle$ dell'hamiltoniana nella rappresentazione delle coordinate, nei due casi in cui le due particelle soddisfino alla statistica di Fermi oppure di Bose.

(2) Esprimere le autofunzioni della domanda precedente in termini della coordinata relativa e della coordinata del baricentro, definite da

$$\begin{aligned} r &= (q_1 - q_2)/2 \\ R &= (q_1 + q_2)/2 \end{aligned} \tag{2}$$

e discutere se esse siano o meno autostati dell'operatore $\mathcal{P}_r$ tale per cui

$$\langle R, r|\mathcal{P}_r|\psi\rangle = \langle R, -r|\psi\rangle \tag{3}$$

(3) Determinare lo spettro di autovalori dell'operatore

$$N_r = \frac{1}{4}\left(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2\right) + {p_r}^2 \tag{4}$$

dove p_r è l'operatore impulso relativo che soddisfa la relazione di commutazione

$$[r, p_r] = i\hbar, \tag{5}$$

essendo r la coordinata relativa eq. (2).

(4) Dimostrare che le autofunzioni dell'operatore eq. (4) sono autostati dell'operatore $\mathcal{P}_r$ eq. (3) e determinare l'autovalore associato.
Suggerimento: sfruttare il fatto (che non è necessario dimostrare) che lo stato fondamentale di N_r è autostato di $\mathcal{P}_r$ associato all'autovalore 1 (cioè è invariante sotto l'azione di $\mathcal{P}_r$)

(5) Dimostrare che l'operatore

$$e^{i\pi\left(\frac{N_r}{2\hbar} - \frac{1}{2}\right)}, \tag{6}$$

con N_r dato dalla eq. (4), fornisce una rappresentazione esplicita dell'operatore $\mathcal{P}_r$ eq. (3). Discutere il significato fisico di questo operatore.

Suggerimento: sviluppare il vettore di stato $|\psi\rangle$ su una base completa di autofunzioni $|n\rangle$ di N_r:

$$\langle Rr|\psi\rangle = \sum_n \langle Rr|n\rangle\langle n|\psi\rangle$$

ed utilizzare il risultato della domanda precedente.