ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

20 giugno 2006

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema soggetto ad un potenziale armonico fino al tempo $t = 0$ (incluso) e libero per tempi successivi, ossia descritto dall'hamiltoniana

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & t \leq 0 \\ \frac{p^2}{2m} & t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

(1) Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = (1+i)\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle, \tag{2}$$

dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato dell'hamiltoniana eq. (1) quando $t < 0$.
Calcolare il valore medio degli operatori posizione x ed impulso p in questo stato, ossia $\langle\psi|x|\psi\rangle$ e $\langle\psi|p|\psi\rangle$.
Suggerimento: Ricordare che l'operatore di distruzione è dato da

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right). \tag{3}$$

(2) Calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso nello stato $|\psi\rangle$ eq. (2), ossia $\langle\psi|(\Delta x)^2|\psi\rangle$ e $\langle\psi|(\Delta p)^2|\psi\rangle$. Calcolarne il prodotto e commentare brevemente il risultato.

(3) Determinare il valore medio di posizione ed impulso per tutti i tempi $t > 0$ per un sistema che a $t = 0$ si trova nello stato $|\psi\rangle$ eq. (2).
Suggerimento: Utilizzare la rappresentazione di Heisenberg per gli operatori x e p, ricordando la forma dell'hamiltoniana eq. (1) quando $t > 0$.

(4) Se il sistema si trova in un autostato dell'hamiltoniana al tempo $t < 0$, esso si trova anche in un autostato dell'hamiltoniana al tempo $t > 0$, o no?

(5) Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$ eq. (2), e si esegua una misura di energia del sistema. Dopo la misura, in quale stato si troverà il sistema, e con che probabilità?

(6) Se il sistema della domanda precedente dopo la misura viene lasciato evolvere nel tempo [sempre con hamiltoniana data dalla eq. (1)], quanto valgono, a seconda dei risultati della misura, i valori medi di posizione x e di impulso p al tempo $t = T > 0$?

(7) Nella situazione della domanda precedente, qual è il risultato di una misura di energia al tempo T?