ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

20 luglio 2004

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

(1) Una particella di spin $\frac{1}{2}$ é descritta dall'hamiltoniana

$$H = B\sigma_z, \tag{1}$$

dove $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sono gli operatori di spin $\frac{1}{2}$ (matrici di Pauli), che soddisfano la regola di commutazione $[\sigma_i, \sigma_j] = i\hbar\epsilon^{ijk}\sigma_k$. Determinare il valor medio di σ_x e σ_y negli autostati dell'hamiltoniana H eq. (1).

(2) Determinare l'evoluzione temporale in rappresentazione di Heisenberg degli operatori σ^+ e σ^- definiti da

$$\sigma^\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y \tag{2}$$

per il sistema dell'esercizio precedente, con hamiltoniana data dalla eq. (1).

(3) Si consideri ora un sistema di *due* particelle di spin $\frac{1}{2}$, con hamiltoniana

$$H_0 = \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}, \tag{3}$$

dove $\vec{\sigma}^{(1)}$ e $\vec{\sigma}^{(2)}$ sono rispettivamente gli operatori di spin per la prima e per la seconda particella. Determinare gli autovalori dell'hamiltoniana, e scrivere le corrispondenti autofunzioni in termini delle autofunzioni di $\sigma_z^{(1)}$ e $\sigma_z^{(2)}$.
Suggerimento: notare che

$$(\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)})^2 = (\vec{\sigma}^{(1)})^2 + (\vec{\sigma}^{(2)})^2 + 2\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}$$

(4) All'hamiltoniana del problema precedente viene aggiunta una perturbazione

$$H_p = \epsilon B\sigma_z^{(1)}. \tag{4}$$

Calcolare al primo ordine in ϵ la perturbazione degli autovalori dell'hamiltoniana H_0 eq. (3) dovuta alla perturbazione H_p eq. (4).
Suggerimento: Osservare che la perturbazione H_p è diagonale nella base delle autofunzioni di H_0, quindi non è necessario diagonalizzarla anche quando gli autostati di H_0 sono degeneri.

(5) L'hamiltoniana eq. (1) è invariante per rotazioni? Alla luce della risposta data all' esercizio (2), discutere in termini di invarianza o non-invarianza per rotazioni la dipendenza dal tempo di σ_x e σ_y.