ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

19 luglio 2005

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Sia data la hamiltoniana che descrive il moto di una particella soggetta ad una forza costante (potenziale lineare):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x, \tag{1}$$

dove p e x sono i consueti operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva.

(1) Si determinino i seguenti commutatori

$$[H, p], \quad [H, x], \quad [H, p^2], \quad [H, x^2], \tag{2}$$

e si discuta quali tra i seguenti operatori possono essere diagonalizzati simultaneamente: H, x, p, T, V, dove T e V sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale.

(2) Si determini la dipendenza dal tempo degli operatori $x(t)$ e $p(t)$ in rappresentazione di Heisenberg, e si calcolino i commutatori

$$[x(t), x(0)] \tag{3}$$

$$[p(t), p(0)], \tag{4}$$

dove $p(0)$ e $x(0)$ sono gli operatori a $t = 0$, che coincidono con gli operatori in rappresentazione di Schrödinger.

(3) Si determini la dipendenza dal tempo degli operatori T e V (energia cinetica e potenziale) in rappresentazione di Heisenberg usando il risultato della domanda 2, e si interpreti il risultato in termini della proprietà di invarianza dell'hamiltoniana.

(4) Si determinino le autofunzioni dell'hamiltoniana eq. (1)

$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle. \tag{5}$$

nella base degli impulsi, ossia come funzioni

$$\langle p|\psi_E\rangle = \psi_E(p). \tag{6}$$

Non è necessario determinare la normalizzazione.

Suggerimento: si esprima l'hamiltoniana direttamente nella base degli impulsi.

(5) Si dimostri che le autofunzioni dell'hamiltoniana nella base delle coordinate sono

$$\langle x|\psi_E\rangle = A \int_0^\infty \cos\left(z(x)t + \frac{t^3}{3}\right) dt, \tag{7}$$

dove A è una costante di normalizzazione e

$$z(x) \equiv \left(\frac{2m\kappa}{\hbar^2}\right)^{1/3} \left(x - \frac{E}{\kappa}\right). \tag{8}$$

Suggerimento: si esprima $\langle x|\psi_E\rangle$ in termini di $\langle p|\psi_E\rangle$ determinata nella domanda precedente.

(6) Si discuta la dipendenza dal tempo di x e p determinata nel punto 2 in termini delle proprietà di invarianza dell'hamiltoniana eq. (1). L'operatore x (in rappresentazione di Schrödinger) può essere interpretato come generatore di una trasformazione, e se sì, quale?