ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

18 luglio 2006

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema unidimensionale soggetto al potenziale (buca infinita)

$$V(x) = \begin{cases} \infty \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } 0 \leq x \leq a \\ \infty \text{ se } x > a \end{cases} \tag{1}$$

(1) Determinare le autofunzioni dell'energia $\psi_n(x)$ (a meno della normalizzazione) e gli autovalori associati.
Suggerimento: Sviluppare le $\psi_n(x)$ in seni e coseni, notando che $V(x)$ non è simmetrico attorno all origine (cioè la buca infinita *non* è centrata nell'origine).

(2) Il potenziale dato ha una simmetria per riflessione attorno al proprio centro. Detto $\mathcal{R}$ l'operatore che realizza questa simmetria, determinare l'elemento di matrice $\langle x|\mathcal{R}|\psi\rangle$, dove $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ è uno stato generico nella base delle coordinate.

(3) Determinare il valor medio di x e p nell'n–esimo autostato di energia $\psi_n(x)$

(4) Calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso $(\Delta x)^2$ e $(\Delta p)^2$ nell'n–esimo autostato di energia $\psi_n(x)$ e commentare brevemente il risultato.
Suggerimento: Ricordare gli integrali

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^a x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = a^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4n^2\pi^2}\right)$$

(5) Determinare il valore medio di p negli stati

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_2(x) + \psi_4(x)\right), \tag{3}$$

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right), \tag{3}$$

dove $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ e $\psi_4(x)$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo ed il terzo stato eccitato.

(6) Sia consideri un sistema che si trova nello stato $\phi(x)$ eq. (3), e si supponga di effettuare su di esso una misura di energia, oppure alternativamente una misura di impulso. Quali sono i possibili risultati di queste misure e quali ne sono le probabilità?

(7) Per un sistema che al tempo $t = 0$ è preparato nello stato $\chi(x)$ eq. (3), determinare il valore medio di p per ogni tempo t.

(8) Discutere che cosa succede nel caso della domanda (6) se vengono eseguite, una dopo l'altra, prima la misura di impulso e poi quella di energia. Discutere come cambia il risultato della domanda (7) se al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di energia oppure se viene eseguita una misura di impulso.