ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

13 settembre 2006

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale soggetto ad una forza costante di intensità δ, ossia descritto dal potenziale

$$V = \delta \hat{x}, \tag{1}$$

dove $\hat{x}$ è l'operatore posizione, e δ è una costante reale.

(1) Si determinino i commutatori

$$[H, \hat{p}], \quad [H, \hat{x}], \quad [H, \hat{p}^2], \quad [H, \hat{x}^2], \tag{2}$$

dove $\hat{p}$ è l'operatore impulso e $H = T+V$ è l'hamiltoniana di particella unidimensionale soggetta al potenziale V.

(2) Si determinino le equazioni di evoluzione temporale per gli operatori posizione ed impulso $\hat{x}(t)$ e $\hat{p}(t)$ in rappresentazione di Heisenberg, e se ne determini la dipendenza dal tempo risolvendo tali equazioni.

(3) Si determini l'elemento di matrice dell'Hamiltoniana tra autostati dell'impulso

$$\langle p|H|p'\rangle, \tag{3}$$

dove $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$. Si determini quindi la dipendenza dal tempo di tale elemento di matrice. Si interpreti il risultato in termini delle proprietà di invarianza dell'hamiltoniana.

(4) Se si esegue una misura di impulso sul sistema al tempo t_0, in che stato si trova il sistema dopo la misura? Se viene eseguita una seconda misura ad un tempo successivo $t > t_0$, il risultato della seconda misura è uguale a quello della prima o no? Che cosa succede se invece a t_0 e $t > t_0$ vengono eseguite due misure di energia?

(5) Si determinino le autofunzioni $|\psi_E>$ dell'hamiltoniana H,

$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle, \tag{4}$$

nella base degli impulsi, ossia $\langle p|\psi_E\rangle$.

(6) Se il sistema al tempo $t = 0$ si trova in uno stato avente funzione d'onda $\psi(p)$ nella base degli impulsi

$$\langle p|\psi(t)\rangle\big|_{t=0} = \psi(p) \tag{5}$$

se ne determini la funzione d'onda al tempo t (in rappresentazione di Schrödinger), cioè si determini

$$\psi(p,t) \equiv \langle p|\psi(t)\rangle. \tag{6}$$

Suggerimento: Si sviluppi lo stato sulla base di autofunzioni dell'hamiltoniana eq. (4), $\langle p|\psi(t)\rangle = \int \langle p|\psi_E\rangle\langle\psi_E|\psi(t)\rangle\, dE$.

(7) Si supponga che al tempo $t = 0$ vengano eseguite una misura di impulso oppure una misura di energia, e si determini la (densità di) probabilità dei possibili risultati di una misura di impulso al tempo $t > 0$.