ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

23 gennaio 2007

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema soggetto all'hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \tag{1}$$

(1) Determinare gli elementi di matrice $\langle n|a|k\rangle$, $\langle n|a^\dagger|k\rangle$, dove

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q + \frac{ip}{m\omega}\right), \tag{2}$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \tag{3}$$

e $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell'hamiltoniana eq. (1).

(2) Si consideri lo stato

$$|\alpha\rangle \equiv e^{\frac{i}{\hbar}c_1 p} e^{\frac{i}{\hbar}c_2 q}|0\rangle, \tag{4}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti reali. Dimostrare che esso è un autostato di a eq. (2):

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{5}$$

e determinare l'autovalore α.

Suggerimento: moltiplicare entrambi i membri di eq. (5) a sinistra per $e^{-\frac{i}{\hbar}c_2 q}e^{-\frac{i}{\hbar}c_1 p}$.

(3) Determinare la decomposizione dello stato $|\alpha\rangle$ eq. (4) sulla base degli stati $|n\rangle$ eq. (3), ossia, ponendo

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\alpha\rangle|n\rangle, \tag{6}$$

determinare gli elementi di matrice $\langle n|\alpha\rangle$.

Suggerimento: si ricordi che $\langle 0|\alpha\rangle = \exp -\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)$

(4) Determinare la dipendenza dal tempo dello stato $|\alpha\rangle$, supponendo che al tempo $t = 0$ esso abbia la forma eq. (4) e che la sua evoluzione temporale (in rappresentazione di Schrödinger) sia governata dalla hamiltoniana eq. (1).

(5) Si supponga di effettuare una misura di energia sul sistema della domanda precedente al tempo $t = t_0$. Quali sono i possibili risultati della misura e le rispettive probabilità? Dopo la misura, in che stato si trova il sistema ad un qualunque tempo $t > t_0$?

(6) Determinare per ogni tempo t, utilizzando la rappresentazione di Schrödinger, i valori medi di posizione ed impulso nello stato $|\alpha\rangle$ eq. (4), $\langle q(t)\rangle$ e $\langle p(t)\rangle$.

(7) Ripetere il calcolo della domanda precedente utilizzando la rappresentazione di Heisenberg.

(8) Determinare per ogni tempo t le indeterminazioni $\Delta q(t)$ e $\Delta p(t)$. Commentare il risultato.

Chi sostiene anche l'esame di meccanica quantistica salti le domande (1), (5), (7).