ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

29 gennaio 2009

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

(1) Considerare un sistema unidimensionale che si trova nell'uno o nell'altro dei seguenti stati:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[|0\rangle + (1+2i)|1\rangle\right]; \qquad |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[|0\rangle + (1+2i)|2\rangle\right], \tag{1}$$

dove $|0\rangle$, $|1\rangle$,..., $|n\rangle$ sono autostati dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico ($|0\rangle$ è lo stato fondamentale), ossia

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{2}$$

(1) Determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso nello stato $|\psi\rangle$ e nello stato $|\varphi\rangle$.
Suggerimento: Ricordare che l'operatore di distruzione è dato da $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$.

(2) Supponendo che il sistema al tempo $t = 0$ si trovi nello stato $|\varphi\rangle$ eq. (1), determinare lo stato in cui esso si trova al tempo t e (utilizzando la rappresentazione di Schrödinger) determinare i valori medi di x e p al tempo t.

(3) Supponendo ora che sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$ eq. (1), calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso in questo stato, ossia $\langle\psi|(\Delta x)^2|\psi\rangle$ e $\langle\psi|(\Delta p)^2|\psi\rangle$. Calcolarne il prodotto e commentare brevemente il risultato.

(4) Si consideri l'operatore $\mathcal{P}$ (parità) tale che

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \langle -x|\psi\rangle. \tag{3}$$

Discutere (a) se $\mathcal{P}$ e l'hamiltoniana H eq. (2) possano essere diagonalizzati simultaneamente; (b) se gli stati $|\psi\rangle$ e $|\varphi\rangle$ eq. (1) siano autostati di $\mathcal{P}$; (c) se gli stati in cui si trova al tempo t un sistema che al tempo $t = 0$ si trovava nello stato $|\psi\rangle$ o nello stato $|\varphi\rangle$ siano autostati di $\mathcal{P}$.

(5) Si supponga di eseguire al tempo $t = 0$ una misura di energia su un sistema che si trova nello stato $|\psi\rangle$ eq. (1): (a) dire quali sono i risultati della misura e le loro probabilità; (b) determinare l'indeterminazione di posizione ed impulso subito dopo la misura; (c) determinare il valor medio di x, p e $\mathcal{P}$ per ogni tempo $t > 0$, cioè successivo alla misura.

(6) Dimostrare che gli autostati di H eq. (1) sono anche autostati dell'operatore

$$\Pi \equiv \exp\left(i\pi a^\dagger a\right), \tag{4}$$

con a dato dalla eq. (3), e determinare gli autovalori corrispondenti.

(7) Utilizzare il risultato della domanda precedente per dimostrare che $\Pi = \mathcal{P}$ su qualunque stato $|\psi\rangle$ eq. (3).

Chi sostiene anche l'esame di meccanica quantistica salti le domande (4), (6), (7) e nella domanda (1) consideri solo lo stato $|\varphi\rangle$.