ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

11 gennaio 2013

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Sia data la hamiltoniana che descrive il moto di una particella soggetta ad una forza costante (potenziale lineare):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \kappa x, \tag{1}$$

dove x e p sono i consueti operatori posizione ed impulso, e κ è una costante reale positiva.

(1) Si determinino i seguenti commutatori

$$[H, p], \quad [H, x], \quad [H, p^2], \quad [H, x^2], \tag{2}$$

e si discuta quali tra i seguenti operatori possono essere diagonalizzati simultaneamente: H, x, p, T, V, dove T e V sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale.

(2) Si determini la dipendenza dal tempo degli operatori T e V (energia cinetica e potenziale) in rappresentazione di Heisenberg sia in forma differenziale che integrale, si confrontino tra di loro, e si interpreti il risultato in termini della proprietà di invarianza dell'hamiltoniana.

(3) Si discuta la dipendenza dal tempo di x e p, ottenuta al punto precedente, in termini delle proprietà di invarianza dell'hamiltoniana eq. (1). Si determini l'effetto della trasformazione generata dall'operatore x sull'Hamiltoniana, e se ne interpreti il risultato.

(4) Si determinino le autofunzioni dell'hamiltoniana eq. (1)

$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle. \tag{3}$$

nella base degli impulsi, ossia come funzioni

$$\langle p|\psi_E\rangle = \psi_E(p). \tag{4}$$

Non è necessario determinare la normalizzazione.

(5) Si determini la dipendenza dal tempo dell'operatore $A = xp$. Si calcoli inoltre

$$\frac{d}{dt}\langle\psi_E|xp|\psi_E\rangle, \tag{5}$$

dove $|\psi_E\rangle$ sono gli autostati di energia Eq. (3).

(6) Si usi il risultato della domanda precedente per dimostrare che $\langle\psi_E|T|\psi_E\rangle$ e $\langle\psi_E|V|\psi_E\rangle$ sono proporzionali e si determini il coefficiente di proporzionalità.