ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

16 febbraio 2009

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella libera di massa m in una dimensione, la cui funzione d'onda nella base delle coordinate è data da

$$\langle x|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2\pi d^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{amx}{\hbar}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4d^2}} \tag{1}$$

con a, b e d numeri reali positivi, tale che $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.
Si ricordino i seguenti integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma\sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma^3\sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 3\sigma^5\sqrt{2\pi}$$

(1) Determinare i valori medi degli operatori posizione ed impulso e le loro indeterminazioni nello stato dato.

(2) Supponendo che il sistema al tempo $t = t_0$ si trovi nello stato $|\psi\rangle$ eq. (1), determinare in funzione dei parametri (a, b, d) il valore di t_0 tale che $\langle x\rangle = 0$ al tempo $t = 0$. *Suggerimento:* determinare i valori medi $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ ad ogni tempo t in termini di quelli al tempo $t = t_0$.

(3) Determinare la distribuzione di probabilità $\rho(x)$ dei risultati di una misura di posizione per un sistema che si trova nello stato eq. (1), la corrente di probabilità associata $j(x)$, e si usi l'equazione di continuità per determinare $\frac{d\rho(x,t)}{dt}$ al tempo $t = t_0$ in cui il si trova nello stato dato.

(4) Si supponga di eseguire una misura di impulso sul sitema la cui funzione d'onda è data dalla eq. (1). Qual è la distribuzione di probabilità dei risultati della misura e qual è la funzione d'onda del sistema dopo la misura?

(5) Determinare l'indeterminazione di una misura di energia del sistema dato. Si confronti il risultato con quello per la misura di impulso e si spieghi se i risultati sono uguali o diversi e perché.