ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

14 febbraio 2011

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale vincolato a muoversi sul segmento $-a \le x \le a$ dal potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \le a \\ \infty \text{ se } |x| > a \end{cases}, \qquad (1)$$

(con a è reale positivo).

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema dato si trovi nello stato

$$\psi(x) = N(a^2 - x^2) \qquad (2)$$

dove N è una costante.

(1) Si supponga la costante N determinata per normalizzazione, e si calcolino in termini di essa i valori medi degli operatori x, x^2, p e p^2.

(2) Si determinino il valor medio e l'indeterminazione per una misura di energia effettuata su questo sistema.

Suggerimento: Si ricordi che, per qualunque operatore H, se $|\phi\rangle = H|\psi\rangle$, allora $\langle\phi| = \langle\phi|H^\dagger$.

(3) Si determini la probabilità che una misura di energia sul sistema (al tempo $t = 0$) dia come risultato l'energia dello stato fondamentale o quella del primo stato eccitato e si dia l'energia di questi stati.

Suggerimento: Si ricordino gli integrali indefiniti

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x,$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x.$$

(4) Nel caso che la misura riveli il sistema nello stato fondamentale, si dia la funzione d'onda al tempo t.

(5) Si risponda nuovamente alla domanda n.3, ma supponendo ora che la misura di energia venga effettuata al tempo t anziche' al tempo $t = 0$.

(6) Si determini l'azione dell'operatore p^4 sulla funzione d'onda Eq. (2), e si riottenga in termini di essa il risultato della domanda (2).