ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

19 giugno 2008

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - ax, \tag{1}$$

dove x e p sono gli operatori posizione ed impulso, e a è un parametro reale positivo.

(1) Si determinino le seguenti derivate temporali di operatori:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt}, \quad \frac{dp}{dt}, \quad \frac{dp^2}{dt},$$

dove tutti gli operatori sono in rappresentazione di Heisenberg.

(2) Si supponga che il sistema al tempo $t = 0$ si trovi nello stato $|\psi\rangle$ la cui funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi è data da

$$\langle p|\psi\rangle = \psi(p) = N \exp\left(-\frac{p^2}{4\Delta^2}\right), \tag{2}$$

dove Δ è un parametro reale positivo ed N è una costante di normalizzazione fissata dalla condizione $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Si calcolino in questo stato i valori medi e le indeterminazioni relativi ad una misura degli operatori x e p: $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle \Delta x\rangle$, $\langle \Delta p\rangle$.

(3) Si scriva la funzione d'onda del sistema al tempo t nella forma

$$\psi(p,t) = \langle p|S(t)|\psi\rangle, \tag{3}$$

dove $|\psi\rangle$ è la funzione d'onda eq. (2) ed $S(t)$ è l'evoluzione temporale del sistema (avente hamiltoniana eq. (1)), scrivendo esplicitamente la forma dell'operatore di evoluzione temporale nella rappresentazione degli impulsi.

(4) Utilizzando i risultati delle domande (1-2), si determinino valor medi ed indeterminazioni di x e p ad ogni tempo t, supponendo che il sistema al tempo $t = 0$ sia nello stato dato dalla eq. (2), e che la sua evoluzione temporale sia governata dall'hamiltoniana eq. (1).
Suggerimento: Si usi la rappresentazione di Heisenberg.

(5) Si supponga di effettuare una misura di posizione al tempo $t = 0$, e poi di ripetere una misura di posizione al tempo t. Discutere l'indeterminazione sulla seconda misura.

(6) Si determini la forma esplicita della funzione d'onda $\psi(p,t)$ eq. (3). Si commenti il risultato.
Suggerimenti: (a) Si faccia uso della formula di Baker-Campbell-Hausdorff $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ (a meno di una fase inessenziale);
(b) Si ricordi che $-i\frac{d}{dz}$ genera le traslazioni della variabile z.