ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

17 giugno 2010

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana di oscillatore armonico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle, \tag{2}$$

dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato della hamiltoniana eq. (1).

(1) Si determinino il valor medio e l'indeterminazione per una misura di posizione effettuate sul sistema al tempo $t = 0$. *Suggerimento:* Si ricordi che l'operatore di distruzione è

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right). \tag{3}$$

(2) Si determini il valor medio per una misura di posizione effettuata sul sistema ad un tempo qualunque t. Utilizzare la rappresentazione di Schrödinger.

(3) Si determini la dipendenza temporale degli operatori di creazione e distruzione $a^\dagger$ ed a in rappresentazione di Heisenberg, scrivendo e risolvendo le equazioni del moto di Heisenberg per questi operatori.

(4) Si esprimano gli operatori posizione ed impulso in rappresentazione di Heisenberg ad un tempo qualunque t in termini degli operatori a ed $a^\dagger$ allo stesso tempo t, e si determinino quindi le espressioni di tali operatori in termini degli operatori al tempo iniziale $t = 0$, ossia in termini degli operatori alla Schrödinger $x_s \equiv x(0)$ e $p_s \equiv p(0)$. Si utilizzi il risultato per determinare il commutatore $[x(t), x(0)]$, e si interpreti il risultato trovato.

(5) Si determini l'espressione dell'operatore indeterminazione alla Heisenberg

$$\Delta^2 x(t) \equiv (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \tag{4}$$

ad un tempo t qualunque in termini di operatori alla Schrödinger x_s e p_s.
Suggerimento: si usi l'espressione di $x(t)$ e $p(t)$ data al punto precedente.

(6) Si supponga di eseguire una misura di energia sul sistema al tempo $t = 0$, quando esso si trova nello stato $|\psi\rangle$ Eq. (2). Si determinino il valor medio e l'indeterminazione per una misura di posizione effettuate sul sistema ad un qualunque tempo $t > 0$ successivo a questa misura. Come cambia il risultato se la tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di posizione anziché una misura di energia?

(7) Si giustifichi il risultato trovato al punto (6) per l'indeterminazione di una misura di posizione nel caso di una misura di energia al tempo $t = 0$ utilizzando l'espressione per l'indeterminazione al tempo t calcolata al punto (5).