ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

18 giugno 2012

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & t \le 0; \\ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (x-b)^2 & t > 0; \end{cases}, \tag{1}$$

ossia soggetto ad un potenziale armonico centrato nell'origine fino al tempo $t = 0$ (compreso) e, per tempi successivi, ad un potenziale armonico centrato in $x = b$, dove b è un parametro reale positivo.
Supporre che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|0\rangle + (1+i)\sqrt{\frac{1}{4}}|1\rangle, \tag{2}$$

dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato della hamiltoniana eq. (1) quando $t \le 0$.

(1) Calcolare il valore medio degli operatori posizione x ed impulso p in questo stato, ossia $\langle\psi|x|\psi\rangle$ e $\langle\psi|p|\psi\rangle$.
Suggerimento: Ricordare che l'operatore di distruzione è dato da

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right). \tag{3}$$

(2) Calcolare l'indeterminazione di posizione ed impulso nello stato $|\psi\rangle$ eq. (2), ossia $\langle\psi|(\Delta x)^2|\psi\rangle$ e $\langle\psi|(\Delta p)^2|\psi\rangle$. Calcolarne il prodotto e commentare brevemente il risultato.

(3) Supporre che ad un tempo $t \le 0$ venga eseguita una misura di energia sul sistema, il quale, qualora la misura *non* venisse eseguita, al tempo $t = 0$ si troverebbe nello stato Eq. (2)). Quali sono i risultati possibili di questa misura e le rispettive probabilità? Il risultato dipende dal tempo t e, se sì, come?

(4) Determinare le equazioni del moto di Heisenberg per gli operatori posizione ed impulso per $t > 0$.

(5) Supponendo di aver effettuato la misura di energia del punto (3), e di aver trovato come risultato $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, determinare i valori medi di posizione ed impulso per ogni tempo t.

(6) Scrivere la funzione d'onda per l'n-esimo autostato di energia dell'hamiltoniana al tempo $t > 0$ in termini dell'azione dell'operatore di traslazione sull'n-esimo autostato di energia dell'hamiltoniana al tempo $t \le 0$; utilizzare quindi il risultato per determinare l'azione dell'operatore di distruzione a relativo all'hamiltoniana al tempo $t \le 0$ sullo stato fondamentale dell'hamiltoniana al tempo $t > 0$, ed in particolare verificare se esso sia o meno un autostato di a.

(7) Dimostrare che l'indeterminazione in posizione relativa al sistema della domanda (5) non dipende dal tempo.
Suggerimento: il risultato può essere ottenuto con il calcolo esplicito oppure (meglio) sfruttando le proprietà di trasformazione sotto traslazioni delle varie quantità in gioco.