ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

15 luglio 2010

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri un sistema unidimensionale soggetto al potenziale

$$V(x) = \chi\delta(x) \tag{1}$$

dove χ è una costante reale positiva. Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$, la cui funzione d'onda nella base delle posizioni è

$$\langle x|\psi\rangle = N\left(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\right)e^{-\frac{1}{4\sigma^2}x^2}. \tag{2}$$

(1) Si determinino il valor medio per una misura di posizione e per una misura di impulso al tempo $t = 0$.

(2) Si determinino le autofunzioni dell'hamiltoniana nella regione $x \neq 0$ e se ne discuta la normalizzazione.

(3) Si supponga di eseguire una misura di impulso al tempo $t = 0$. Quali sono i possibili risultati della misura e quali sono le loro probabilità (a) nel caso $\sigma \to \infty$ (b) nel caso di σ generico. Nel caso (b), discutere la forma della distribuzione della probabilià ed in particolare indicare i risultati più probabili della misura.
Suggerimento: Si ricordi l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\sigma^2}}e^{-k^2\sigma^2}$.

(4) Si dimostri che in presenza del potenziale Eq. (1) le autofunzioni dell'hamiltoniana devono avere derivata discontinua nel punto $x = 0$ e si determini questa discontinuità.
Suggerimento: Si ricordi che $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$.

(5) Si determini la generica autofunzione dell'hamiltoniana che nella regione $x > 0$ coincide con un'onda piana progressiva (cioè con impulso positivo). A questo fine, si usi il risultato della domanda (2) per scrivere le autofunzioni dell'hamiltoniana nelle due regioni $x < 0$ ed $x > 0$, si supponga che la funzione d'onda sia continua in $x = 0$, e si supponga che la derivata prima della funzione d'onda sia discontinua in $x = 0$, utilizzando il risultato della domanda (4) per determinare questa discontinuità.

(6) Si determini la corrente di probabilità sia per $x < 0$ che per $x > 0$: è continua in $x = 0$ o no? Si calcolino i coefficienti di trasmissione e riflessione.

(7) Se $\kappa < 0$, le funzioni d'onda determinate al punto (5) sono ancora autofunzioni dell'energia? Discutere se queste siano tutte e sole le autofunzioni dell'hamiltoniana o meno, sia quando $\kappa > 0$ che quando $\kappa < 0$. Discutere inoltre il comportamento di queste autofunzioni sotto parità.